

Theoretische Teilchenphysik I

Dozent: Prof. Dr. Ulrich Nierste
Skript: Fred-Markus Stober und U. Nierste

16. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	4
1.1 Überblick	4
1.1.1 „Landkarte der Quantenfeldtheorie“	6
1.2 Konventionen	7
1.2.1 Metrik	7
1.2.2 Levi-Civita-Tensor	7
1.2.3 Summenkonvention	8
2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe	8
2.1 Lorentzgruppe	8
2.1.1 Raum- und Zeitspiegelung	9
2.1.2 Rotationen	9
2.1.3 Lie-Algebra	10
2.1.4 Darstellungen und Feldgleichungen	12
2.2 Poincaré-Gruppe \mathcal{P}	16
2.3 Casimir-Operatoren	17
3 Lagrangeformalismus der Felder	18
3.1 Bewegungsgleichungen	18
3.2 Noether-Theorem	23
4 Kanonische Feldquantisierung	29
4.1 Reelles Klein-Gordon-Feld	29

Lehrbücher

[Kugo] Kugo, Taichiro: *Eichtheorie*, Springer

[1] Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley

[2] Bailin, David and Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger

[Ramond] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley

[3] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg

[4] Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Pr.

[5] Bjorken, James D. and Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wiss.-Verl.

[Kaku] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press

[Sternan] Sternan, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press

[Weinberg] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press

[6] Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard: *Quantum field theory*, McGraw-Hill

[7] Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and leptons*, Wiley

[Pokorski] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press

URLs:

<http://pdg.lbl.gov>

<http://www.slac.stanford.edu/spires/hep>

<http://arxiv.org>

<http://www.cern.ch>

Particle Data Group

Datenbank SPIRES für Publikationen

Preprint-Archiv

CERN

1 Einführung

1.1 Überblick

Elementarteilchenphysik = Hochenergiephysik

Grundlage: Quantenfeldtheorie

Teilchen \leftrightarrow Anregungszustände von Quantenfeldern

Zentrale Fragen

1. Welche fundamentale Teilchen (Quantenfelder) gibt es?
2. Welche Wechselwirkungen wirken zwischen ihnen?
3. Welchen Symmetrien unterliegen Teilchen und Wechselwirkungen?

kurze Abstände \leftrightarrow hohe Energien \leftrightarrow frühe Zeiten nach dem Urknall

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = \frac{\hbar c}{0,2 \text{ GeV}}$$

1 GeV \simeq Mittlere Energie aller Teilchen 10^{-4} s nach dem Urknall
als es eine Temperatur von $\frac{1 \text{ GeV}}{k_B} = 10^{13} \text{ K}$ ($= 10^{-10} \frac{\text{J}}{k_B}$) hatte.

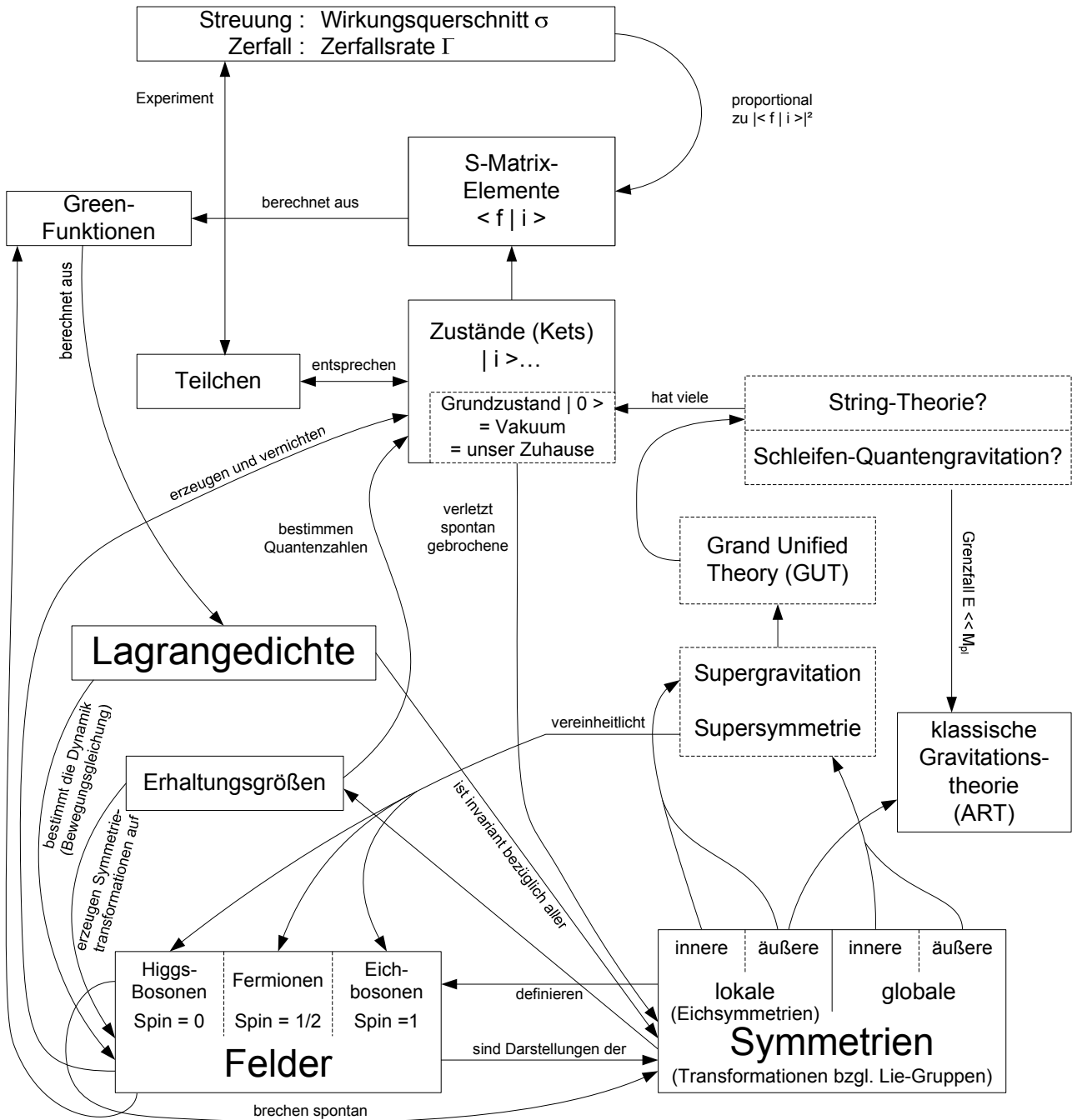
$$1 \text{ GeV} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\frac{1 \text{ GeV}}{c^2} = 1,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Energieskala	phy. Relevanz	Längenskala	Zeit nach dem Urknall ¹
Planck-Skala 10^{19} GeV	(Quanten-) Gravitation	10^{-35} m	$\leq 10^{-43}$ s, 10^{32} K
GUT-Skala 10^{16} GeV?	Vereinheitlichung der Eichwechselwirkungen	10^{-32} m	10^{-37} s, 10^{29} K
10^{10} GeV – 10^{16} GeV?	Masse rechtshändiger Neutrinos? Leptogenese? Baryogenese?	10^{-26} m – 10^{-32} m	10^{-32} s – 10^{-26} s 10^{23} K – 10^{26} K
10^2 GeV – 10^4 GeV	Mechanismus zur Stabilisierung der elektroschwachen Skala. Leptogenese? Baryogenese?	10^{-18} m – 10^{-20} m	10^{-14} s – 10^{-10} s 10^{15} K – 10^{17} K
elektroschwache Skala 10^2 GeV	Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, Higgs-Physik?, Masse von W und Z - Boson	Reichweite der schwachen WW 10^{-18} m	10^{-10} s, 10^{15} K
hadronische Skala 200 MeV – 2 GeV	Confinement der Quarks, Massen der leichten Hadronen (p, n)	Nukleonradius 10^{-15} m – 10^{-16} m	10^{-4} s, 10^{13} K
$0,05$ eV – 1 eV	Massen der Neutrinos	10^{-6} m – 10^{-7} m (irrelevant)	10^5 y – 10^6 y 10^3 – 10^5 K
0	Masse des Photons, des Gluons und des Gravitons	Reichweite der el. mag. WW und der Gravitation ∞	

¹Temperatur $T = 10^{10}$ K $\cdot \sqrt{\frac{s}{t}}$

1.1.1 „Landkarte der Quantenfeldtheorie“



1.2 Konventionen

Natürliche Einheiten (Planck-Einheiten):

$$1. \quad c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ s} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$2. \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s} \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ s} = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}$$

$$\hbar c = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ m} = 5,1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}$$

$$m = \frac{E_{\text{Ruhe}}}{c^2} = E_{\text{Ruhe}} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ kg} = 5,5 \cdot 10^{26} \text{ GeV}$$

3. el. Elementarladung $e > 0$

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137, \dots} \text{ ist Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante} \quad \Rightarrow \quad e = 0,30$$

$$e \text{ ist dimensionslos! Coulomb-Potential eines H-Atoms: } V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

Alle physikalischen Einheiten sind Potenzen der Energie. Der Exponent heißt (Massen-) **Dimension**. Man schreibt:

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1, \quad [\text{Masse}] = 1, \quad [e] = 0$$

1.2.1 Metrik

$$g = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$$

1.2.2 Levi-Civita-Tensor

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade} \\ -1 & \text{für ungerade} \\ 0 & \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Permutation} \\ \text{sonst} \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \sigma \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0123} = +1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{0123} &= g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \varepsilon^{0123} \\ &= -\varepsilon^{0123} = -1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \text{ d.h. } \varepsilon^{12} = 1 \quad (2)$$

1.2.3 Summenkonvention

Über wiederkehrende Indizes wird summiert:

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i$$

$$\text{Meist: } a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu$$

Bei Vierervektoren laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

2.1 Lorentzgruppe

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{kontravariant}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{kovariant}$$

Skalarprodukt: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$, $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ $g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$.

Die linearen Transformationen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3)$$

$$\text{mit } x'_\mu y'^\mu = x_\mu y^\mu \quad \text{für alle } x, y \quad (4)$$

bilden die Lorentzgruppe $\mathcal{L} = \text{O}(1, 3) = \text{O}(3, 1)$ und (3) heißt **Lorentz-Transformation**.

$$(4) \Rightarrow g = \Lambda^\top g \Lambda \quad (5)$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (6)$$

Lorentz-Transformationen aus

1. $\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 \geq +1\}$ heißen **eigentlich orthochron**.
2. $\mathcal{L}_+^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 \leq -1\}$ heißen **eigentlich nicht-orthochron**.
3. $\mathcal{L}_-^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \geq +1\}$ heißen **uneigentlich orthochron**.
4. $\mathcal{L}_-^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \leq -1\}$ heißen **uneigentlich nicht-orthochron**.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$$

2.1.1 Raum- und Zeitspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow \quad (7)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$$

\mathcal{L}_+^\uparrow und

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \text{SO}(3, 1) = \text{SO}(1, 3) \quad (9)$$

sind Untergruppen von \mathcal{L} . (Ebenso $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$ und $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$.) SO steht für „spezielle orthogonale Gruppe“ und (1, 3) gibt die Signatur der Metrik an. Naturgesetze sind invariant unter \mathcal{L}_+^\uparrow („lorentzinvariant“).

2.1.2 Rotationen

\mathcal{L}_+^\uparrow enthält **Rotationen**:

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\vec{\varphi}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (10)$$

mit Achse $\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$ und Winkel $\varphi = |\vec{\varphi}|$

$$R(\vec{\varphi})_{ij} = \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi^2} \right) \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \varepsilon_{ijk} \varphi_k \quad (11)$$

Ein reiner (d.h. ohne Rotation) **Boost** in ein sich mit Relativgeschwindigkeit \vec{v} bewegendes Bezugssystem ist:

$$\Lambda(\vec{u}, 0) = \begin{pmatrix} \cosh u & & -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u \\ -\frac{\vec{u}}{u} \sinh u & \mathbf{1}_{3 \times 3} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}^\top}{u^2} (\cosh u - 1) & \end{pmatrix} \quad (12)$$

mit der **Rapidity** $u = \text{arctanh} |\vec{v}|$ und $\vec{u} = u \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Für $\vec{u}_1 \uparrow \vec{u}_2$ ist $\Lambda(\vec{u}_1, 0)\Lambda(\vec{u}_2, 0) = \Lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, 0)$.

Generatoren J_k und K_j ($j, k = 1, 2, 3$):

$$\Lambda(0, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) \quad (13a)$$

$$\text{mit } [J_k]_{lm} = -i\varepsilon_{klm} \text{ und } [J_k]_{0\mu} = [J_k]_{\mu 0} = 0$$

$$\Rightarrow [J_k]_{\lambda\mu} = -i\varepsilon_{0k\lambda\mu} \quad (13b)$$

($[J_k]_{lm}$ hieß $\omega^{(k)}_{lm}$ in der QM-II-Vorlesung.)

$\Lambda(\vec{u}, 0) = \exp(i\vec{u} \cdot \vec{k})$ mit $[K_j]_{\lambda\mu} = i\delta_{\lambda 0}\delta_{j\mu} + i\delta_{0\mu}\delta_{\lambda j}$, also:

$$K_j = i \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$J_k = J_k^\dagger \text{ und } K_j = -K_j^\dagger$$

2.1.3 Lie-Algebra

$$\begin{aligned} [J_k, J_l] &= i\varepsilon_{klm}J_m \text{ (Drehimpulsalgebra)} & (15) \\ [K_j, K_n]_{\lambda\sigma} &= [K_j]_{\lambda\mu} [K_n]_{\mu\sigma} - [K_n]_{\lambda\mu} [K_j]_{\mu\sigma} \\ &\stackrel{(14)}{=} i^2 [(\delta_{\lambda 0}\delta_{j\mu} + \delta_{0\mu}\delta_{\lambda j})(\delta_{\mu 0}\delta_{n\sigma} + \delta_{0\sigma}\delta_{\mu n}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &\stackrel{\Sigma_{\mu=0}^3}{=} i^2 [(\delta_{\lambda 0}\delta_{j 0}\delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda j}\delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda 0}\delta_{\sigma 0}\delta_{jn} + \delta_{0n}\delta_{0\sigma}\delta_{\lambda j}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &\stackrel{j,n \geq 1}{=} i^2 [(\delta_{\lambda j}\delta_{n\sigma} + \delta_{\lambda 0}\delta_{\sigma 0}\delta_{jn}) - (n \longleftrightarrow j)] \\ &= i^2 [\delta_{\lambda j}\delta_{n\sigma} - \delta_{n\lambda}\delta_{j\sigma}] \text{ da } \delta_{\lambda 0}\delta_{\sigma 0}\delta_{jn} \text{ symmetrisch. bzgl. } n \leftrightarrow j \text{ ist,} \\ &= i^2 \varepsilon_{jnk} \varepsilon_{0k\lambda\sigma} \stackrel{(13b)}{=} -i \varepsilon_{jnk} [J_k]_{\lambda\sigma} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [K_j, K_n] = -i\varepsilon_{jnk}J_k \quad (16)$$

$$\text{Ebenso: } [J_k, K_l] = i\varepsilon_{klm}K_m \quad (17)$$

Dramatische Vereinfachung:

$$N_j^+ = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \quad (18a)$$

$$N_j^- = \frac{1}{2}(J_j - iK_j) \quad (18b)$$

$$N_j^{+\dagger} = N_j^+ \text{ und } N_j^{-\dagger} = N_j^- \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} [N_j^+, N_k^-] &= \frac{1}{4} \{ [J_j, J_k] + i [K_j, J_k] - i [J_j, K_k] + [K_j, K_k] \} \\ &= \frac{i}{4} [\varepsilon_{jkl}J_l + \varepsilon_{jkl}K_l - \varepsilon_{jkl}K_l - \varepsilon_{jkl}J_l] = 0 \quad \text{mit (15) - (17), (19a)} \end{aligned}$$

$$\text{Ebenso: } [N_j^+, N_k^+] = i\varepsilon_{jkl}N_l^+ \quad (19b)$$

$$[N_j^-, N_k^-] = i\varepsilon_{jkl}N_l^- \quad (19c)$$

1. Die Lie-Algebren N_j^+ und N_j^- entkoppeln.

2. (19) ist die Lie-Algebra von SU(2).

Jedes $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ lässt sich schreiben als

$$\Lambda = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+) \exp(i\vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-) = \exp\left(i(\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-)\right) \quad (20)$$

wegen $[\vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+, \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^-] = 0$

($SU(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$, aber \mathcal{L}_+^\uparrow ist einfach.)

Mit (19) können wir die Darstellungstheorie von \mathcal{L}_+^\uparrow aus der von $SU(2)$ gewinnen.

\Rightarrow Spin-Quantenzahlen $s = 0, 1/2, 1, \dots$

Sind $D^{s_1}(\vec{\alpha})$ und $D^{s_2}(\vec{\alpha})$ zwei Darstellungen der $SU(2)$, so ist (nun mit komplexem α)

$$D^{(s_1, s_2)}(\vec{\alpha}) = D^{s_1}(\vec{\alpha}) \otimes D^{s_2}(\vec{\alpha}^*)$$

eine Darstellung von \mathcal{L}_+^\uparrow .

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = \vec{\varphi} \text{ reell} &\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^- = \vec{\varphi} \cdot \vec{J} \\ &\text{Drehung } \Lambda(0, \vec{\varphi}) \\ \vec{\alpha} = -i\vec{u} \text{ imaginär} &\Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{N}^+ + \vec{\alpha}^* \cdot \vec{N}^- = \vec{u} \cdot \vec{K} \\ &\text{Boost } \Lambda(\vec{u}, 0) \end{aligned}$$

Parität:

$$\begin{aligned} P : \quad \vec{J} &\rightarrow \vec{J} && \text{(Axialvektor)} \\ \vec{K} &\rightarrow -\vec{K} && \text{(polarer Vektor)} \\ \text{also: } P : \quad \vec{N}^\pm &\rightarrow \vec{N}^\mp \\ D^{(s_1, s_2)} &\rightarrow D^{(s_2, s_1)} \end{aligned}$$

\Rightarrow Darstellungen mit $s_1 \neq s_2$ verletzen die Parität.

Casimir-Operatoren:

Casimir-Operatoren vertauschen mit allen Darstellungsoperatoren J_k, K_j :

$$SU(2) : (\vec{N}^\pm)^2 = \frac{1}{4}(\vec{J}^2 - \vec{K}^2 \pm i\vec{J} \cdot \vec{K} \pm i\vec{K} \cdot \vec{J})$$

mit Eigenwerten $s_1(s_1 + 1)$ und $s_2(s_2 + 1)$ in der Darstellung $D^{(s_1, s_2)}$ bzw.

$$\vec{N}^{+2} + \vec{N}^{-2} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{K}^2) \quad (21)$$

mit Eigenwert $s_1(s_1 + 1) + s_2(s_2 + 1)$ und

$$\vec{N}^{+2} - \vec{N}^{-2} = \frac{i}{2}(\vec{J} \cdot \vec{K} + \vec{K} \cdot \vec{J}) \quad (22)$$

mit Eigenwert $s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1)$.

2.1.4 Darstellungen und Feldgleichungen

$\mathbf{D}^{(0,0)}$: skalar:

$$D^{(s_1, s_2)}(N_j^+) = D^{(s_1, s_2)}(N_j^-) = 0$$

komplexes Klein-Gordon-Feld $\varphi(x)$:

$$\square\varphi + m^2\varphi = \partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0 \quad (23)$$

$\mathbf{D}^{(0,1/2)}$: rechtshändiger Spinor ξ_a :

$$\left. \begin{array}{l} D(N_j^+) = 0 \\ D(N_j^-) = \frac{\sigma_j}{2} \end{array} \right\} \stackrel{(18)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} D(J_k) = \frac{\sigma_k}{2} \\ D(K_k) = i\frac{\sigma_k}{2} \end{array} \right.$$

$$\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi}) = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \vec{J} + i\vec{u} \cdot \vec{K}) \quad (24)$$

wird abgebildet auf

$$\begin{aligned} D^{(0,1/2)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi})) &= \exp\left((i\vec{\varphi} - \vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ &= \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det M = 1\} \end{aligned} \quad (25)$$

und für $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist

$$\xi'_a(x') = D^{(0,1/2)}(\Lambda)_a{}^b \xi_b(x) \quad (26)$$

ein „SL(2, \mathbb{C})-2-Spinorfeld“ (Beispiel: Masseloses Anti-Neutrino)

$\mathbf{D}^{(1/2,0)}$: linkshändiger (gepunkteter) Spinor $\eta_{\dot{a}}$ (\dot{a} wird nie mit einem ungepunkteten Index a kontrahiert!):

$$\left. \begin{array}{l} D(N_j^+) = \frac{\sigma_j}{2} \\ D(N_j^-) = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(18)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} D(J_k) = \frac{\sigma_k}{2} \\ D(K_k) = -i\frac{\sigma_k}{2} \end{array} \right.$$

(24) wird abgebildet auf

$$D^{(0,1/2)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi})) = \exp\left((i\vec{\varphi} + \vec{u})\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \quad (27)$$

und für $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist

$$\eta^{\dot{a}}(x') = D^{(1/2,0)}(\Lambda)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \eta^{\dot{b}}(x) \quad (28)$$

ein „SL(2, \mathbb{C})-2*-Spinorfeld“

Der antisymmetrische Tensor 2. Stufe,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invariant unter $SL(2, \mathbb{C})$ -Transformationen:

$$\varepsilon = M^\top \varepsilon M \text{ für } M \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (29)$$

(Vergleiche mit (5) für metrischen Tensor g)
Beweis von (29):

$$M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} :$$

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det M} \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } \det M = 1 : &\Rightarrow 1 = M \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \\ &\Rightarrow \varepsilon = M \varepsilon M^\top \varepsilon^\top \Rightarrow (29) \end{aligned}$$

(29) bedeutet, dass (mit $M = D^{(0,1/2)}(\Lambda(\vec{u}, \vec{\varphi}))$):

$$\zeta'^\top \varepsilon \xi' = \zeta^\top M^\top \varepsilon M \xi \stackrel{(29)}{=} \zeta^\top \varepsilon \xi \quad (30)$$

$\zeta^\top \varepsilon \xi$ ist also ein bzgl. \mathcal{L}_+^\uparrow Lorentz-invariantes antisymmetrisches (= symplektisches) Produkt: $\zeta^\top \varepsilon \xi = -\xi^\top \varepsilon \zeta$. Dies gilt ebenso für gepunktete Spinoren. Analog zur definierenden Darstellung von \mathcal{L} können wir also das Heben und Senken von Indizes definieren:

$$\xi^a = \varepsilon^{ab} \xi_b \quad (31a)$$

$$\eta^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \eta_{\dot{b}} \text{ mit } \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (31b)$$

Das invariante Produkt (30) wird dann zu

$$\zeta^\top \varepsilon \xi = \zeta_a \varepsilon^{ab} \xi_b = \zeta_a \xi^a \quad (32)$$

Auch die Indizes von ε^{ab} kann man senken:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cd} &= \varepsilon_{ca} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{bd} \text{ ist antisymmetrisch} \\ \text{mit } \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{2a} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{b1} = \varepsilon_{21} \varepsilon^{12} \varepsilon_{21} \\ &\Rightarrow 1 = \varepsilon^{12} \varepsilon_{21} \Rightarrow \varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} \\ \text{also : } \varepsilon^{ab} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{und: } \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bc} = -[\varepsilon^2]_a{}^c = +\delta_a^c = + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Rechte Indizes von ε^{ab} müssen durch Summation über linke Indizes gesenkt werden, sonst gäbe es Widersprüche zu $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$. Dies ist eine häufige Quelle von Vorzeichenfehlern, z.B. im [Kugo].

Probe:

$$\varepsilon_{ac}\varepsilon^{cd}\varepsilon_{db} = \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} = -\varepsilon_{bd}\varepsilon^{dc}\varepsilon_{ca} = -(-\varepsilon_{db})(-\varepsilon^{cd})(-\varepsilon_{ac}) = +\varepsilon_{ac}\varepsilon^{cd}\varepsilon_{db} \quad \checkmark$$

1.

$$\begin{aligned} \zeta^a &= \varepsilon^{ab}\zeta_b \\ \Rightarrow \varepsilon_{ca}\zeta^a &= \varepsilon_{ca}\varepsilon^{ab}\zeta_b = +\delta_c^b\zeta_b = +\zeta_c \\ \Rightarrow \zeta_c &= +\varepsilon_{ca}\zeta^a \end{aligned} \quad (35)$$

2.

$$\begin{aligned} \zeta^\top \xi &= \zeta^a \xi_a \stackrel{(35)}{=} \zeta^a (+\varepsilon_{ab}\xi^b) \\ &= \varepsilon_{ab}\zeta^a \xi^b \\ &= -\varepsilon_{ba}\zeta^a \xi^b = -\zeta_b \xi^b \quad \text{vgl. (32)} \end{aligned} \quad (36)$$

Merkregel: „+“ für „links oben, rechts unten“

Komplexe Konjugation: $\eta^*_{\dot{a}} := (\eta^*)_{\dot{a}} = (\eta_a)^*$

Gepunkteter Index, weil

$$\begin{aligned} \eta^* &\stackrel{(26)}{=} [D^{(0,1/2)}(\Lambda)]^* \eta^* \stackrel{(25)}{=} \left[\exp \left((i\vec{\varphi} + \vec{u}) \left(\frac{-\vec{\sigma}^*}{2} \right) \right) \right] \eta^* \\ &= \underbrace{\varepsilon \exp \left((i\vec{\varphi} + \vec{u}) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right)}_{D^{(1/2,0)}(\Lambda)} \varepsilon^{-1} \eta^* \quad \text{da } \varepsilon^{-1}(-\sigma_j^*)\varepsilon = \sigma_j \\ \eta'^*_{\dot{a}} &= \varepsilon^{\dot{a}b} [D^{(1/2,0)}(\Lambda)]_b \dot{\varepsilon}_{\dot{c}d} \eta'^*_{\dot{d}} \\ \eta'^*_{\dot{b}} &= [D^{(1/2,0)}(\Lambda)]_b \dot{\varepsilon} \eta'^*_{\dot{c}} \end{aligned} \quad (37)$$

Pauli-Matrizen

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} : = (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (1, \vec{\sigma}) \quad (38a)$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} : = (1, -\vec{\sigma}) \quad (38b)$$

mit den üblichen Pauli-Matrizen σ^i , $i = 1, 2, 3$.

$$\Rightarrow (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta}\varepsilon_{\delta\beta} = -(\bar{\sigma}^\mu)^*_{\alpha\dot{\beta}} \quad (39)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma^\nu) = 2\delta_\mu^\nu, \quad (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_\alpha^\delta \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \quad (40)$$

Weyl-Gleichung

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} = 0 \quad \text{(linkshändig)} \quad (41a)$$

$$\begin{array}{c} P \\ \updownarrow \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \partial_\mu \eta_\beta = 0 \quad \text{(rechtshändig)} \end{array} \quad (41b)$$

$\mathbf{D}^{(1/2,1/2)}$: $\hat{V}_{\alpha\dot{\beta}}$ Lorentztransformation:

$$\begin{aligned}\hat{V}' &= D^{(0,1/2)}(\Lambda)\hat{V}D^{(0,1/2)}(\Lambda)^\dagger \\ \hat{V}'_{\gamma\dot{\delta}} &= D^{(0,1/2)}_{\gamma}{}^{\alpha}\hat{V}_{\alpha\dot{\beta}}D^{(0,1/2)*\dot{\beta}}{}_{\dot{\delta}}\end{aligned}$$

Man findet aus (25) und (27):

$$\bar{\sigma}^\nu \Lambda_\nu{}^\mu = D^{(0,1/2)\dagger} \bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \quad (42)$$

$$\text{Also: } V^\mu = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} \hat{V}_{\alpha\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \hat{V}) \quad (43)$$

transformiert sich wie ein Vierervektor:

$$\begin{aligned}V'^\mu &= \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \hat{V}') = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \hat{V} D^{(0,1/2)\dagger}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(D^{(0,1/2)\dagger} \bar{\sigma}^\mu D^{(0,1/2)} \hat{V}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\nu \hat{V}) \Lambda_\nu{}^\mu \\ &= V^\mu\end{aligned}$$

$\Rightarrow (1/2, 1/2)$ ist die definierende Darstellung von \mathcal{L}_+^\uparrow .

Vermöge $\hat{x} = x_\mu \sigma^\mu$ kann man jeden Vierervektor als 2×2 - Matrix schreiben.

\Rightarrow Das gibt die Möglichkeit, Vektorfelder an Spinoren zu koppeln.

$\mathbf{D}^{(0,1/2)} \oplus \mathbf{D}^{(1/2,0)}$: ist reduzible, P-invariante Darstellung:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \text{ Dirac-Spinor in chiraler Basis} \quad (44)$$

(Die **chirale Basis** wird auch **Weyl-Basis** genannt.)

Lorentz-invariante Feldgleichung:

$$[i\partial - m]\psi = 0 \quad (45)$$

mit $\partial = \partial_\mu \gamma^\mu$ und

$$\gamma^\mu = \gamma_{ch}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

in der chiralen Basis.

z.B.

$$\gamma_{ch}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. (45) sind gekoppelte Gleichungen für ξ, η .

$$\begin{aligned}
\gamma_{ch}^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= i \begin{pmatrix} \sigma^0\bar{\sigma}^1 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^0\sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2\bar{\sigma}^3 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^2\sigma^3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \sigma^0\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^0\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2\times 2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times 2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{47}$$

Chirale Dirac-Spinoren:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

sind wegen $\gamma_5^2 = 1$ Projektoren ($P_L^2 = P_L$ und $P_R^2 = P_R$). Ein Dirac-Spinor ψ_L mit $P_R\psi_L = 0$ heißt **linkshändig** ($P_L\psi_R = 0 \Rightarrow \psi_R$ heißt **rechtshändig**).

Jeder Dirac-Spinor kann als $\psi = \psi_L + \psi_R$ geschrieben werden. Mit (47) sieht man in der chiralen Basis

$$\underbrace{\psi_L}_{\substack{\text{linkshändiger} \\ \text{Dirac-Spinor}}} = P_L\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rechtshändiger} \\ \text{Weyl-Spinor}}}$$

$$\text{analog} : \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^\beta \end{pmatrix}$$

(\rightarrow siehe [Stermann])

$D^{(1,0)}$ und $D^{(0,1)}$: antisymmetrischer Tensor $F^{\mu\nu}$ (6 reelle Komponenten) \rightarrow dualer Tensor $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$

Tensoren $F^{\pm\mu\nu}$ mit $\left\{ \begin{array}{l} F^{+\mu\nu} = \tilde{F}^{+\mu\nu} \\ F^{-\mu\nu} = -\tilde{F}^{-\mu\nu} \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{selbst-dual} \\ \text{anti-selbst-dual} \end{array} \right\}$ und haben jeweils 3 Kom-

ponenten. Sie transformieren sich wie $\left\{ \begin{array}{l} D^{(0,1)} \\ D^{(1,0)} \end{array} \right\}$ ($\dim D^{(0,1)} = 3$). Zerlegt man $F^{\mu\nu} = F^{+\mu\nu} + F^{-\mu\nu}$, so findet man, dass sich $F^{\mu\nu}$ wie $D^{(0,1)} \oplus D^{(1,0)}$ transformiert.

2.2 Poincaré-Gruppe \mathcal{P}

\mathcal{P} enthält \mathcal{L} und die Translationsgruppe \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu : a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \tag{48a}$$

$$\mathcal{P} = \{x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu : \Lambda^\mu{}_\nu \in \mathcal{L}, a^\mu \in \mathbb{R}^4\} \tag{48b}$$

Bemerkung: $\mathcal{P} \neq \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$, denn zwei Poincaré-Transformationen mit (Λ_1, a_1) und (Λ_2, a_2) multiplizieren sich zur Transformation mit $(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$, und \mathcal{P} ist damit ein *semidirektes Produkt* von \mathcal{L} und \mathcal{T} (siehe [8]).

Generatoren der Translation:

$$P_\rho = -i\partial_\rho \quad (49)$$

denn: $f(x') = f(x + a) = \exp(ia^\rho P_\rho)f(x)$ (Taylor-Reihe).
Lorentztransformationen kann man als

$$\Lambda = \exp(i\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \quad (50a)$$

schreiben mit 6 Parametern $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ und antisymmetrischen Generatoren $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$

$$J_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}M_{kl} \Rightarrow M_{kl} = \varepsilon_{klm}J_m \quad (50b)$$

$$K_j = M_{0j} \quad j, k, l \geq 1 \quad (50c)$$

Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (51a)$$

$$[J_j, P_0] = 0 \quad (51b)$$

$$[J_j, P_k] = i\varepsilon_{jkl}P_l \quad (51c)$$

$$[K_j, P_0] = -iP_j \quad (51d)$$

$$[K_j, P_k] = -iP_0\delta_{jk} \quad (51e)$$

Hierbei ist $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ und $j, k, l = 1, 2, 3$.

2.3 Casimir-Operatoren

1. $P_\mu P^\mu$

$$\text{z.B. } [K_j, P_\mu P^\mu] = [K_j, P_0^2] - [K_j, P_k \cdot P_k] \stackrel{(51)}{=} -2iP_j P_0 + 2i\delta_{jk}P_0 P_k = 0$$

2. Mit dem **Pauli-Lubanski-(Axial-)Vektor**

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (52)$$

ist $W_\mu W^\mu$ ein Casimir-Operator (ohne Beweis).

$$W^0 = \frac{1}{2}\varepsilon^{0jkl}(-P_j)M_{kl} \stackrel{(50)}{=} \frac{1}{2}\varepsilon^{0jkl}(-P_j)\varepsilon_{klm}J_m = -P_j J_j = -\vec{P} \cdot \vec{J} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{1}{2}\varepsilon^{j\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(-\varepsilon^{0jrs}P_0 M_{rs} + \varepsilon^{jn\rho\sigma}P_n M_{\rho\sigma}) \\ &\stackrel{(50)}{=} -P_0 J_j + \frac{1}{2}\varepsilon^{jn0\sigma}P_n(M_{0\sigma} - M_{\sigma 0}) = -P_0 J_j + \varepsilon^{jns}P_n K_s \end{aligned}$$

$$\vec{W} = -P_0 \vec{J} + \vec{P} \times \vec{K} \quad (54)$$

Im Ruhesystem eines massiven Teilchens (KG) mit $p^\mu = (m, 0, 0, 0)^\top$ ist

$$\vec{W}^{RS} = -m\vec{J} \quad (55)$$

(d.h. \vec{W} misst den Drehimpuls im Ruhesystem, also den Spin \vec{S}). Darstellungstheorie von \mathcal{P} (E. Wigner): Zustände (= Teilchen) können mit den Eigenwerten von $P_\mu P^\mu$ und $W_\mu W^\mu$ gekennzeichnet werden. Dabei sind 4 Fälle möglich:

(a) $P_\rho P^\rho = m^2 > 0$ **massives Teilchen**

$$W_\rho W^\rho \stackrel{RS}{=} -m^2 \vec{S}^2$$

Eigenwerte:

$W_\rho W^\rho = -m^2 s(s+1)$ mit $s = 0, 1/2, 1, \dots$ ist Poincaré-invariant, also in jedem Bezugssystem richtig. Massive Teilchen mit Spin s haben $(2s+1)$ Polarisationsfreiheitsgrade.

(b) $P_\rho P^\rho = m^2 = 0$ **masseloses Teilchen**

und $W_\rho W^\rho = 0$. Aus (52) folgt $P_\rho W^\rho = 0$. Damit muss W^μ proportional zu P^μ sein: $W^\mu = \lambda P^\mu$. λ heißt Helizität und kann nur die Werte $\lambda = \pm s$ annehmen, wobei $s = 0, 1/2, 1, \dots$ der Spin der Darstellung ist.

\Rightarrow Masselose Teilchen mit $s \neq 0$ haben nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade.

(c) $P_\rho P^\rho = 0$ und Spin s ist reelle Zahl.

$W_\rho W^\rho < 0$, kommt in der Natur nicht vor.

(d) $P_\rho P^\rho < 0$ **Tachyonen**

... gibt's anscheinend nicht.

(Siehe [Ramond].)

3 Lagrangeformalismus der Felder

3.1 Bewegungsgleichungen

Mechanik:

- System mit Koordinaten (Freiheitsgrade) $\varphi_1, \dots, \varphi_N$
- Lagrange-Funktion $L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$; $\varphi_i = \varphi(x_i)$

Man betrachtet nun eine Kette aus gekoppelten, harmonischen Oszillatoren:

$$L(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2}}_{\text{Kopplung an den nächsten Nachbarn}}$$

mit Masse 1 und Federkonstanten $(x_{i+1} - x_i)^{-2}$. Führt man nun einen Grenzübergang zu einem kontinuierlichen Spektrum durch, so erhält man:

$$\begin{aligned}\varphi_i(t) = \varphi(t, x_i) &\rightarrow \varphi(t, x) \\ \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{x_{i+1} - x_i} &\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}\end{aligned}$$

Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$$

In 3 + 1 Dimensionen:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$$

Dieser Ausdruck ist Lorentz-invariant!

Wir addieren einen weiteren Lorentz-invarianten, bilinearen Term:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 =: \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2}_{\text{kinetischer Term}} - \underbrace{\frac{m^2}{2} \varphi^2}_{\text{Massenterm}} \quad (56)$$

Dies ist die Lagrangedichte eines freien, reellen Klein-Gordon-Feldes (Skalarfeld).

Wirkung:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

mit dem Lorentz-invarianten Volumenelement $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Dimension: $[S] = [\hbar] = 0$, $[d^4x] = -4 \Rightarrow [\mathcal{L}] = 4$, $[\partial_\mu] = 1$, $[\varphi] = 1 \Rightarrow [m] = 1$.

Wie in der Mechanik folgen aus dem **Prinzip der extremalen Wirkung** $\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0$ die **Euler-Lagrange-Gleichungen**.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (57)$$

Für das reelle Skalarfeld (56):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} &= \partial^\mu \varphi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \varphi \\ \stackrel{(57)}{\Rightarrow} \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi &= 0\end{aligned} \quad (58)$$

erhält man also die Klein-Gordon-Gleichung für reelles φ mit Masse m .

Zwei reelle Skalarfelder mit gleicher Masse m :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{m^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ \stackrel{(57)}{\Rightarrow} (\square + m^2) \varphi_i &= 0, \quad i = 1, 2\end{aligned} \quad (59)$$

(59) hat SO(2)-Symmetrie:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Komplexes Skalarfeld:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \\ \varphi^* &= \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi^*}{\sqrt{2}} \\ \varphi_2 = i \frac{\varphi^* - \varphi}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Damit erhält man die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 |\varphi|^2 \\ &= |\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 \end{aligned} \quad (60)$$

Im Gegensatz zu Gleichung (55) fehlt hier der Faktor $\frac{1}{2}$! Formal behandelt man in (57) φ und φ^* wie unabhängige Felder:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} &\stackrel{(60)}{=} \partial_\mu \partial^\mu \varphi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} &= -m^2 \varphi \\ &\stackrel{(57)}{\Rightarrow} (\square + m^2) \varphi = 0 \end{aligned}$$

und erhält die Klein-Gordon-Gleichung für ein komplexes Skalarfeld.

(60) hat nun eine U(1) (\simeq SO(2))-Symmetrie:

$$\varphi \rightarrow \varphi \exp(i\theta) \quad (61)$$

Symmetrien unter Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten x^μ heißen **äußere Symmetrien** (Beispiel: Poincaré-Transformationen). Symmetrietransformationen, bei denen die Felder φ , nicht jedoch x^μ transformiert werden, vermitteln **innere Symmetrien**.

(Beispiel: U(1)-Symmetrie in (61), Ladungskonjugation C)

Die Wirkung ändert sich nicht, wenn man zu \mathcal{L} eine totale Ableitung addiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \partial_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] \\ S' &= S + \int d^4x \partial_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] \\ &= S + \oint_O d\sigma_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] && \text{mit dem Oberflächenelement } d\sigma_\mu \\ & && \text{einer 3-dim Hyperfläche} \\ &= S \end{aligned}$$

da man nur Felder zulässt, bei denen φ und $\partial_\nu \varphi$ für $x^\mu \rightarrow \pm\infty$ hinreichend schnell verschwinden, so dass $\oint_O d\sigma_\mu Y^\mu[\varphi, \partial_\nu \varphi] = 0$.

\mathcal{L} muss reell sein, damit Energie und Impuls reell sind.

Definiere:

$$\varphi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_2 := \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_1 \overleftarrow{\partial}_\mu \varphi_2 = \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - (\partial_\mu \varphi_1) \varphi_2$$

Lagrangedichte des Weyl-Feldes ξ_a ohne Masse

$$\mathcal{L}_R^{kin} = \frac{i}{2} \xi^\dagger \overleftarrow{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi = \frac{i}{2} [\xi^\dagger \overleftarrow{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - (\partial_\mu \xi^\dagger) \overleftarrow{\sigma}^\mu \xi] \quad (62)$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt (ξ und ξ^\dagger unabhängig behandeln!):

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi^\dagger)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\dagger} = \partial_\mu \left(-\frac{i}{2} \overleftarrow{\sigma}^\mu \xi \right) - \frac{i}{2} \overleftarrow{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \\ 0 &= \overleftarrow{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \quad (\text{Weyl-Gleichung}) \end{aligned}$$

Ebenso für $\eta^{\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L^{kin} &= \frac{i}{2} \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta \\ &\Rightarrow \sigma^\mu \partial_\mu \eta = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Massen-Term:

$$\mathcal{L}_L^m = -\frac{1}{2} (m_L \eta^\top \varepsilon \eta - m_L^* \eta^\dagger \varepsilon \eta^*) \quad (64a)$$

$$\mathcal{L}_R^m = -\frac{1}{2} (m_R \xi^\dagger \varepsilon \xi^* - m_R^* \xi^\top \varepsilon \xi) \quad (64b)$$

Nun ist $\eta^\top \varepsilon \eta = \eta^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \eta^1 \eta^2 - \eta^2 \eta^1$. Das wäre = 0 für eine klassische Theorie.

Spin- $\frac{1}{2} \Rightarrow$ Anti-kommutierende Feldoperatoren

$$\eta^1 \eta^2 = -\eta^2 \eta^1 \Rightarrow \eta^\top \varepsilon \eta = 2\eta^1 \eta^2 \neq 0$$

Wegen $(\eta^\top \varepsilon \eta)^\dagger = \eta^\dagger \varepsilon^\dagger \eta^* = -\eta^\dagger \varepsilon \eta^*$ ist (64) hermitesch. Die Terme in (64) heißen **Majorana-Massenterme**.

$$\mathcal{L}_D^m = -m \xi^\dagger \eta - m^* \eta^\dagger \xi \quad (65)$$

heißt **Dirac-Massen-Term**.

Mit $\psi = \begin{pmatrix} \exp(-i\theta)\xi \\ \exp(+i\theta)\eta \end{pmatrix}$, wobei $m = |m| \exp(2i\theta)$, wird (65) zu:

$$\mathcal{L}_D^m = -|m| \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi = -|m| \bar{\psi} \psi \quad (66)$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ und $\gamma^0 = \gamma_{ch}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in der chiralen Basis der Dirac-Algebra. (62) und (63) werden zu:

$$\mathcal{L}_D^{kin} = \mathcal{L}_L^{kin} + \mathcal{L}_R^{kin} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi \quad (67)$$

mit $\partial = \partial_\mu \gamma^\mu$ und

$$\gamma^\mu = \gamma_{ch}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

D.h. aus (66) und (67) findet man die Lagrangedichte des freien Dirac-Feldes:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} - m \right) \psi = -\frac{i}{2} \underbrace{\bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi}_{=\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \partial \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - \frac{i}{2} \partial \psi + m \psi \\ \Rightarrow 0 &= (i\partial - m) \psi \quad (\text{Dirac-Gleichung}) \end{aligned} \quad (69)$$

Mit der Ableitung nach ψ findet man die adjungierte Gleichung:

$$0 = \bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial} + m)$$

Meistens notiert man kürzer:

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D + \frac{i}{2} \underbrace{\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{\text{totale Ableitung}} = \underbrace{\bar{\psi} (i\overleftarrow{\partial} - m) \psi}_{\text{nicht hermitesch}} \quad (70)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}'_D}{\partial \bar{\psi}} = (i\overleftarrow{\partial} - m) \psi$$

Generell kann $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ zu $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger + \text{totale Ableitung}$ abgeschwächt werden.

Aus der QM II-Vorlesung ist die Dirac-Gleichung in der **Dirac-Basis** bekannt.

$$\begin{aligned} \gamma_D^\mu &= U \gamma_{ch}^\mu U^{-1} \\ \text{mit } U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger \end{aligned}$$

Ein Feld, dass sich unter der Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ wie $V'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x)$ transformiert, heißt **Vektorfeld**. Mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$ des freien Vektorfelds ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} U_\mu U^\mu \quad (71)$$

Ist $m \neq 0$, so spricht man von einem **Proca-Feld**.

Beispiele:

- für $m = 0$: Photonen, Gluonen
- für $m \neq 0$: W^\pm, Z -Bosonen, ρ Meson

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu U_\nu)(\partial^\mu U^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu U_\nu)(\partial^\nu U^\mu) + \frac{m^2}{2}U_\mu U^\mu \quad (72)$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

Betrachte Beiträge $(\mu, \nu) = (\alpha, \beta)$ und $(\mu, \nu) = (\beta, \alpha)$ in (72) und schreibe $U_\mu U^\mu = U_\mu g^{\mu\nu} U_\nu$:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha U_\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\beta} \\ &= \partial_\alpha (-\partial^\alpha U^\beta + \partial^\beta U^\alpha) - m^2 U^\beta \end{aligned} \quad (73)$$

$$= (\square g^{\beta\alpha} - \partial_\alpha \partial^\beta - m^2 g^{\beta\alpha}) U^\alpha \quad (\text{Proca-Gleichung}) \quad (74)$$

Betrachte: $m = 0$ und Kopplung an Stromdichte j^μ , Photonfeld A^μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\partial_\alpha \underbrace{(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}_{(73)} = \underbrace{j^\beta}_{=\frac{\partial(j_\mu A^\mu)}{\partial A^\beta}} \quad (75)$$

Man findet also die Maxwellgleichungen $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta$.

3.2 Noether-Theorem

Betrachte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$; φ ist ein Feld (φ skalar oder $\varphi = \varphi_i$ oder $\varphi = A^\mu$ oder ein Multiplett von Feldern $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$) und infinitesimale Transformationen bezüglich einer Lie-Gruppe

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (76)$$

mit

$$\delta x^\mu = X_k^\mu \delta \omega^k \quad (77)$$

Dabei sind die $\delta \omega^k$ die Parameter der Transformation (z.B. Eulerwinkel).

Beispiel: Drehung um $\delta \vec{\omega}$

$$\vec{x}' = \vec{x} + i \delta \omega^k J_k \vec{x}$$

damit hat man: $X_k^0 = 0$, $X_k^j = i(J_k \vec{x})^j$, $j = 1, 2, 3$.

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta\varphi(x) \quad (78)$$

(Skalar: $\varphi'(x') = \varphi(x) \Rightarrow \delta\varphi(x) = 0$, Vektor: $\varphi'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \varphi^\nu(x)$, usw.)

Da φ Darstellung der Liegruppe ist,

$$\delta\varphi(x) = \Phi_k(x)\delta\omega^k \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= \varphi'(x + \delta x) \\ &= \varphi'(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &= \varphi(x) + \delta_0\varphi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \end{aligned} \quad (80)$$

mit $\delta_0\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$

$$\begin{aligned} \delta_0\varphi(x) &\stackrel{(80)}{=} \varphi'(x') - \varphi(x) - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(78)(79)}{=} \Phi_k(x)\delta\omega^k - \delta x^\nu \partial_\nu \varphi \\ &\stackrel{(77)}{=} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) X_k^\nu] \delta\omega^k \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}'[\varphi'(x'), \partial_\mu \varphi'(x')] - \mathcal{L}[\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)] \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta_0\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \underbrace{\partial^\mu \delta_0\varphi}_{=\delta_0\partial^\mu \varphi} \end{aligned} \quad (82)$$

Ist φ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, so ist $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$ und (82) wird zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta_0\varphi \right) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} X_k^\mu(x) \delta\omega^k + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k(x) - (\partial_\nu \varphi) X_k^\nu(x)] \delta\omega^k \right] \end{aligned} \quad (83)$$

Wirkung:

$$\begin{aligned}
S' &= \int d^4x \mathcal{L}'(\varphi', \partial_\mu \varphi') \\
\delta S &= S' - S \\
&= \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L}
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
d^4x' &= \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x \\
&= \left| \det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu X_k^\mu \delta\omega^k) \right| d^4x \\
&= (1 + \partial_\mu X_k^\mu \delta\omega^k) d^4x, \\
&\text{denn } \det(\mathbf{1} + \varepsilon) = \mathbf{1} + \text{tr } \varepsilon + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\delta(d^4x) = \partial_\mu X_k^\mu \delta\omega^k \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &\stackrel{(80)(81)}{=} \int d^4x (\mathcal{L} \partial_\mu X_k^\mu \delta\omega^k + \delta \mathcal{L}) \\
&\stackrel{(83)}{=} \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} X_k^\mu \delta\omega^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} [\Phi_k - (\partial_\nu \varphi) X_k^\nu] \right] \delta\omega^k
\end{aligned} \tag{86}$$

Ist $\delta\omega^k$ unabhängig von x , so spricht man von **globalen Transformationen**. Das Integrationsvolumen in $S = \int_V d^4x \mathcal{L}$ ist bisher un spezifiziert. Wir wählen V beliebig. Ist nun S invariant, also $\frac{\delta S}{\delta\omega^k} = 0$, so folgt aus (86), dass

$$j_k^\mu = -\mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} (X_k^\nu \partial_\nu \varphi - \Phi_k(x)) \tag{87}$$

ein erhaltener Strom ist (**Noether-Theorem**):

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0 \tag{88a}$$

j_k^μ heißt Noether-Strom. Mit (88a) ist die Ladung

$$Q_i(x) = \int d^3\vec{x} j_i^0(t, \vec{x}) \tag{88b}$$

konstant:

$$\dot{Q}_i(x) = \int d^3\vec{x} \partial_0 j_i^0 \stackrel{(88b)}{=} - \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \oint_O d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$$

für $\vec{j} = 0$ im Unendlichen.

Der erhaltene Noether-Strom ist nicht eindeutig, z.B. kann man einen Strom $j_k'^\mu$ addieren, dessen Divergenz verschwindet:

$$\partial_\mu j_k'^\mu = 0$$

(z.B. $j_k'^\mu = \partial^\nu T_{\mu\nu}$ mit $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$)

Verallgemeinerung von (87) auf den Fall mehrerer Felder φ^a in \mathcal{L} :

$$j_k^\mu = -\mathcal{L}X_k^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}(X_k^\nu\partial_\nu\varphi^a - \Phi_k^a(x))$$

Beispiel: Reelles KG-Feld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \quad (89)$$

dabei ist $V(\varphi)$ eine beliebige Funktion (z.B. $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$)
 \Rightarrow BGL ist nicht mehr linear in $\varphi \Rightarrow$ Selbstwechselwirkung
 \mathcal{L} ist invariant unter Transformationen

$$x^\nu \rightarrow x^\nu + \underbrace{\varepsilon^\nu}_{\delta\omega^k} \quad (90)$$

$$\text{also } X_\nu^\mu(x) \stackrel{(77)}{=} \delta_\nu^\mu \quad (91)$$

φ ist ein Skalarfeld $\delta\varphi(x) = 0 \stackrel{(79)}{\Rightarrow} \Phi_\nu(x) = 0$.

$$(89) \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \quad (92a)$$

Den erhaltenen Strom bezeichnet man im Fall der Translationen (90) mit T_ν^μ , es ist der **Energie-Impuls-Tensor**.

$$T_\nu^\mu \stackrel{(88)}{=} -\mathcal{L}\delta_\nu^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi \quad (92b)$$

$$\stackrel{(82)}{=} -\mathcal{L} \underbrace{\delta_\nu^\mu}_{(91)} + \underbrace{\partial^\mu\varphi}_{(92)}\partial_\nu\varphi$$

$$T_\nu^\mu \stackrel{(89)}{=} \partial^\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\mu \left(\frac{1}{2}(\partial_\lambda\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \right) \quad (93)$$

Damit hat man die erhaltene Ladung, den Viererimpuls:

$$P_\nu = \int d^3\vec{x}T_\nu^0 \quad (94)$$

Fourierdarstellung des Feldes:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^* e^{ipx})$$

Für das *freie* KG-Feld mit $V(\varphi) = 0$ findet man leicht:

$$P_\nu = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}} p_\nu$$

Dies ist

- unabhängig von x
- eine Superposition der einzelnen Impulse p_ν der Fourierkomponenten.

Aus (92b) findet man

$$T_0^0 = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \partial_0 \varphi \quad (95)$$

Ein Vergleich mit der klassischen Mechanik

$$H = \sum_\lambda p_i \dot{q}_i - L = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

$\Rightarrow T_0^0$ ist **Hamilton-Dichte!**
kanonische(r) Feldimpuls(dichte)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \stackrel{(92)}{=} \dot{\varphi}(x), \text{ wobei } \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi \quad (96)$$

Es ist $T_0^0 \stackrel{(95)}{=} \pi(x)\varphi(x) - \mathcal{L}(x)$.

Der Hamilton-Operator (= Energie) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} H &= P_0 \stackrel{(94)}{=} \int d^3 \vec{x} T_0^0 = \int d^3 \vec{x} (\pi(x)\dot{\varphi} - \mathcal{L}(x)) \\ &\stackrel{(89)(96)}{=} \int d^3 \vec{x} \left(\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2) + V(\varphi) \right) \end{aligned} \quad (97)$$

und der Impuls ist:

$$\begin{aligned} P_j &\stackrel{(94)}{=} \int d^3 \vec{x} T^{0j} \stackrel{(93)}{=} \int d^3 \vec{x} \dot{\varphi} \partial_j \varphi \\ P^j &= - \int d^3 \vec{x} \dot{\varphi} \partial_j \varphi \\ \vec{P} &= - \int d^3 \vec{x} \dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi = - \int d^3 \vec{x} \underbrace{\pi(x) \vec{\nabla} \varphi}_{\text{Impulsdichte}} \end{aligned} \quad (98)$$

Nächste Anwendung des Noether-Theorems:
Infinitesimale Drehungen

$$\begin{aligned} \delta \vec{x} &= i \delta \omega^k J_k \vec{x}, & \delta x^0 &= 0 \\ X_k^j &= i [J_k, \vec{x}^j], & X_k^0 &= 0, & j, k &= 1, 2, 3 \\ \delta \varphi &= 0 = \Phi_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(88) \Rightarrow j_k^0 &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (\partial_j \varphi) X_k^j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} (\vec{\nabla} \varphi)^\top i J_k \vec{x} \\
&\stackrel{(92)}{=} -\dot{\varphi} (\vec{\nabla} \varphi)^\top i J_k \vec{x}
\end{aligned} \tag{99}$$

Wir definieren mit (98) die Impulsdichte $\vec{p}(x) = -\dot{\varphi} \vec{\nabla} \varphi$, so dass $\vec{P} = \int d^3 \vec{x} \vec{p}(x)$, so wird (99) zu

$$\begin{aligned}
j_k^0 &= \vec{p}(x) i J_k \vec{x} = p_m \underbrace{(i J_k)_{mn}}_{=\varepsilon_{kmn} \text{ (13)}} x_n \\
&= \varepsilon_{kmn} p_m x_n = (\vec{p} \times \vec{x})_k
\end{aligned}$$

D.h. $-j_k^0$ ist eine Drehimpulsdichte. Erhaltene Ladung (88b) ist der Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
L_k &= -\int d^3 \vec{x} j_k^0(x) \\
\vec{L} &= \int d^3 \vec{x} (\vec{x} \times \vec{p})
\end{aligned} \tag{100}$$

Anwendung des Noether-Theorems auf eine innere Symmetrie:
Komplexes KG-Feld, siehe (60), nun mit Selbstwechselwirkung

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m |\varphi|^2 - V(|\varphi|) \tag{101}$$

Diese weist eine U(1)-Symmetrie auf:

$$\begin{aligned}
\varphi &\rightarrow \varphi \exp(i\delta\vartheta) = \varphi + i\delta\vartheta\varphi \\
\delta x^\mu &= 0 \Rightarrow X_k^\mu = 0 \\
\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= i\delta\vartheta\varphi \\ \delta\varphi^* &= -i\delta\vartheta\varphi^* \end{aligned} \right\} \stackrel{(79)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \Phi \delta\vartheta \\
&\text{mit } \Phi = \begin{pmatrix} i\varphi \\ -i\varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{102}$$

Der Noether-Strom (88) lautet:

$$\begin{aligned}
j^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \Phi^1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \Phi^2 \\
&\stackrel{(101)(102)}{=} -i(\partial^\mu \varphi^*)\varphi + i(\partial^\mu \varphi)\varphi^*
\end{aligned} \tag{103}$$

mit der erhaltenen Ladung

$$Q = \int d^3 \vec{x} j^0 = i \int d^3 \vec{x} (\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \varphi^*)$$

z.B. elektrische Ladung.
U(1)-Symmetrie der Dirac-Theorie

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp(-i\theta)\bar{\psi}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\cancel{A}\psi$$

(mit der Kopplung an das elektromagnetische Feld \cancel{A})
 Φ ist wie in (102):

$$\Phi = \begin{pmatrix} i\psi_a \\ -i\bar{\psi}_a \end{pmatrix} \quad \text{Spinor-Index } a = 1, 2, 3, 4$$

(103) wird zu

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}i\psi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi}_a)}i\bar{\psi}_a \\ &= -i\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (104)$$

U(1)-Stromdichte des Dirac-Feldes.

Ist z.B. ψ das Elektronenfeld, so ist $ej^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ die elektromagnetische Stromdichte.

$$Q = e \int d^3\vec{x}j^0 = e \int d^3\vec{x}\bar{\psi}\gamma^0\psi = e \int d^3\vec{x}\psi^\dagger\psi$$

ist die erhaltene elektrische Gesamtladung. $e\psi^\dagger\psi$ ist also die Ladungsdichte.

4 Kanonische Feldquantisierung

Klassische Feldtheorie

Feld $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ oder \mathbb{C}^n \longrightarrow (Feld-)Quantisierung \longrightarrow

Quantenfeldtheorie

Feldoperator $\varphi(x)$ auf
einem Hilbertraum

„zweite Quantisierung“

(Manchmal schreibt man auch $\hat{\varphi}$ für den Feldoperator.)

4.1 Reelles Klein-Gordon-Feld

Analog zu harmonischen Oszillatoren der Quantenmechanik:

$$[\phi(x), \pi(x')]|_{x^0=x'^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\mathbf{1} \quad (105)$$

$$[\phi(x), \phi(x')]|_{x^0=x'^0} = [\pi(x), \pi(x')]|_{x^0=x'^0} = 0 \quad (106)$$

$\phi(x)$: Operator zur Amplitude eines harmonischen Oszillators, der am Raum-Punkt \vec{x} angebracht ist.

Operatoren sind zeitabhängig (x_0 -abhängig)

\Rightarrow Heisenbergbild bzw. (für wechselwirkende Theorien) Wechselwirkungsbild.

In der Quantenmechanik wurde der Fall betrachtet, dass die Amplitude des Oszillators der Ort eines Punktteilchens war, d.h. ϕ, π entsprachen Orts- und Impulsoperator. Diese Interpretation ist in der relativistischen Quantenmechanik nicht möglich, da es keinen Ortsoperator gibt (wg. der Nichterhaltung der Teilchenzahl).

Fouriertransformation:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(i\vec{k}\vec{x})\phi(x) \quad (107)$$

$$\tilde{\pi}(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(i\vec{k}\vec{x})\pi(x) \quad (108)$$

$\tilde{\phi}$ und $\tilde{\pi}$ sind Felder im 3-er Impulsraum.

Inverse:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \quad (109a)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\vec{x})\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \quad (109b)$$

Demn:

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \stackrel{(107)}{=} \int d^3\vec{x}' \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \exp(i\vec{k}\vec{x}')}_{=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \phi(x^0, \vec{x}') = \phi(x)$$

Zeitabhängigkeit von $\tilde{\phi}(\vec{k}, t)$ für das freie KG-Feld: KG-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\square + m^2)\phi(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(x) \\ 0 &\stackrel{(109)}{=} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \exp(-i\vec{k}\vec{x})\tilde{\phi}(\vec{k}, t) \\ &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = 0 \end{aligned} \quad (110a)$$

$$\text{Also : } \tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\phi}(\vec{k}, 0) \cos(E_k t) + \frac{\dot{\tilde{\phi}}(\vec{k}, 0)}{E_k} \sin(E_k t) \quad (110b)$$

$$\text{mit } E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

Definiere:

$$a(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, t) + i\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \right] \quad (111a)$$

$$a^+(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}^+(\vec{k}, t) - i\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \right] \quad (111b)$$

a^+ : $\left\{ \begin{array}{l} \text{komplexe} \\ \text{hermitesche} \end{array} \right\}$ Konjugation für $\left\{ \begin{array}{l} \text{klassische Felder} \\ \text{Feldoperatoren} \end{array} \right\}$.

$$\phi \text{ reell} \quad \stackrel{(107)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}^+(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{x} \exp(-i\vec{k}\vec{x})\phi(x) = \phi(-\vec{k}, t) \\ \tilde{\pi}^+(\vec{k}, t) = \pi(-\vec{k}, t) \end{array} \right\} \quad (112)$$

$$\Rightarrow a^+(-\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, t) - i\tilde{\pi}(\vec{k}, t) \right] \quad (113)$$

Mit (113) finden wir aus (111):

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a(\vec{k}, t) + a^+(\vec{k}, t)) \quad (114a)$$

$$\tilde{\pi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a^+(\vec{k}, t) - a(\vec{k}, t)) \quad (114b)$$

und mit (109):

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{x})}{\sqrt{2E_k}} a(\vec{k}, t) + \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(-i\vec{k}\vec{x})}{\sqrt{2E_k}} a^+(-\vec{k}, t)}_{\text{substitution } \vec{k} \rightarrow -\vec{k}} \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (\exp(-i\vec{k}\vec{x})a(\vec{k}, t) + \exp(i\vec{k}\vec{x})a^+(\vec{k}, t)) \quad (115) \\ \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}(x))} = \dot{\phi}(x) \Rightarrow \tilde{\pi}(\vec{k}, t) = \dot{\tilde{\phi}}(\vec{k}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(110) &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] \tilde{\pi}(\vec{k}, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(111) &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{k}^2 + m^2 \right] a(\vec{k}, t) = 0 \end{aligned}$$

(sieht man auch aus $0 = (\square + m^2)\phi(x)$ mit (113))

Lösung:

$$\begin{aligned} a(\vec{k}, t) &= a_{\vec{k}} \exp(-iE_k t), & a_{\vec{k}} &= a(\vec{k}, 0) \\ a^+(\vec{k}, t) &= a_{\vec{k}}^+ \exp(+iE_k t) \end{aligned}$$

$$(115) \Rightarrow \phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_{\vec{k}} \exp(-ikx) + a_{\vec{k}}^+ \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k} \quad (116)$$

$$\text{und } \pi(x) = -i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (a_{\vec{k}} \exp(-ikx) - a_{\vec{k}}^+ \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k} \quad (117)$$

Bemerkung: Wie ist ein Integral über einen Operator definiert?

Beispiel: In (117) ist $\pi(x)$ der Operator, dessen Matrixelemente $\langle f | \pi(x) | i \rangle$ durch

$$-i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (\langle f | a_{\vec{k}} | i \rangle \exp(-ikx) - \langle f | a_{\vec{k}}^+ | i \rangle \exp(ikx)) \Big|_{k^0=E_k}$$

gegeben ist. ($\langle f | a_{\vec{k}} | i \rangle$ ist eine „normale“, komplexe Funktion von \vec{k}). Mit (111) und (109) können wir $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^+]$ aus (105) und (106) berechnen.

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^+] &= \frac{1}{2E_k} \left[E_k \tilde{\phi}(\vec{k}, 0) + i\tilde{\pi}(\vec{k}, 0), E_{k'} \tilde{\phi}^+(\vec{k}', 0) - i\tilde{\pi}^+(\vec{k}', 0) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3 \vec{x} \exp(i\vec{k} \vec{x}) \int d^3 \vec{y} \exp(-i\vec{k}' \vec{y}) i E_{k'} \underbrace{[\pi(\vec{x}, 0), \phi(\vec{y}, 0)]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3 \vec{x} \exp(-i\vec{k} \vec{x}) \int d^3 \vec{y} \exp(i\vec{k}' \vec{y}) i E_k \underbrace{[\phi(\vec{y}, 0), \pi(\vec{x}, 0)]}_{i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{k'}}{E_k}} \underbrace{\int d^3 \vec{x} \exp(i(\vec{k} - \vec{k}') \vec{x})}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_k}{E_{k'}}} \underbrace{\int d^3 \vec{x} \exp(i(\vec{k}' - \vec{k}) \vec{x})}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')} \end{aligned} \quad (118)$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (119)$$

Ebenso findet man (nun wegen eines relativen „-“-Zeichens zwischen den Termen):

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}] = [a_{\vec{k}}^+, a_{\vec{k}}^+] = 0 \quad (120)$$

Hamilton-Operator

$$H = \int d^3 \vec{x}' T_0^0 \stackrel{(97)}{=} \int d^3 \vec{x}' \left[\frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi) \right]$$

H ist zeitunabhängig wegen des Noether-Theorems.

\Rightarrow wähle im folgenden $t = t'$ in den Feldern ϕ und π rechts.

$$[\phi(x), H] = \int d^3 \vec{x}' \frac{1}{2} \left(\underbrace{[\phi(x), \pi^2(x')]_{t=t'}}_{\pi(x')[\phi(x), \pi(x')] + [\phi(x), \pi(x')]\pi(x')} + [\phi(x), (\vec{\nabla} \phi(x'))^2]_{t=t'} \right) \quad (121)$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), (\vec{\nabla} \phi(x'))^2] &= [\phi(x), \partial_j \phi(x') \partial_j \phi(x')]_{t=t'} \\ &= [\phi(x), \partial_j \phi(x')] \partial_j \phi(x') + \partial_j \phi(x) [\phi(x'), \partial_j \phi(x')] \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^j} \underbrace{[\phi(x), \phi(x')]}_{=0} \Rightarrow [\phi(x), (\vec{\nabla} \phi)^2] = 0 \end{aligned}$$

$$(121) \Rightarrow [\phi(x), H] = \int d^3 \vec{x}' \pi(t, \vec{x}') i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = i\pi(t, \vec{x}) = i\dot{\phi}(x) \quad (122)$$

Dies ist die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für ϕ !

$$[\pi(x), H] = \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left[[\pi(x), \underbrace{\phi(x')(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x')}_{\text{part. Int.: } \int (\nabla\phi)^2 = -\int \phi \nabla^2 \phi}] + [\pi(x), V(\phi(x')))] \right] \quad (123)$$

Für $V(\phi) = \sum_n c_n \phi^n$: Wegen

$$[\pi, \phi^n] = \phi[\pi, \phi^{n-1}] + \underbrace{[\pi, \phi]}_{-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \phi^{n-1}$$

findet man durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} [\pi(x), \phi^n(x')] &= -n\phi^{n-1}(x')i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'), \text{ also} \\ [\pi(x), V(\phi(x')))] &= \sum_n c_n [\pi(x), \phi^n(x')] = -i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial V}{\partial \phi}(x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (123) \Rightarrow [\pi(x), H] &= \int d^3\vec{x}' \left(-i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x') - i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial V}{\partial \phi}(x') \right) \\ &= -i(-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(x) - i \frac{\partial V}{\partial \phi}(x) \end{aligned} \quad (124)$$

Aus (122) und (124) findet man:

$$\ddot{\phi}(x) \stackrel{(122)}{=} -i[\dot{\phi}, H] = -i[\pi, H] \stackrel{(124)}{=} (\nabla^2 - m^2)\phi(x) - \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (125)$$

$$\Rightarrow (\square + m^2)\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (126)$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

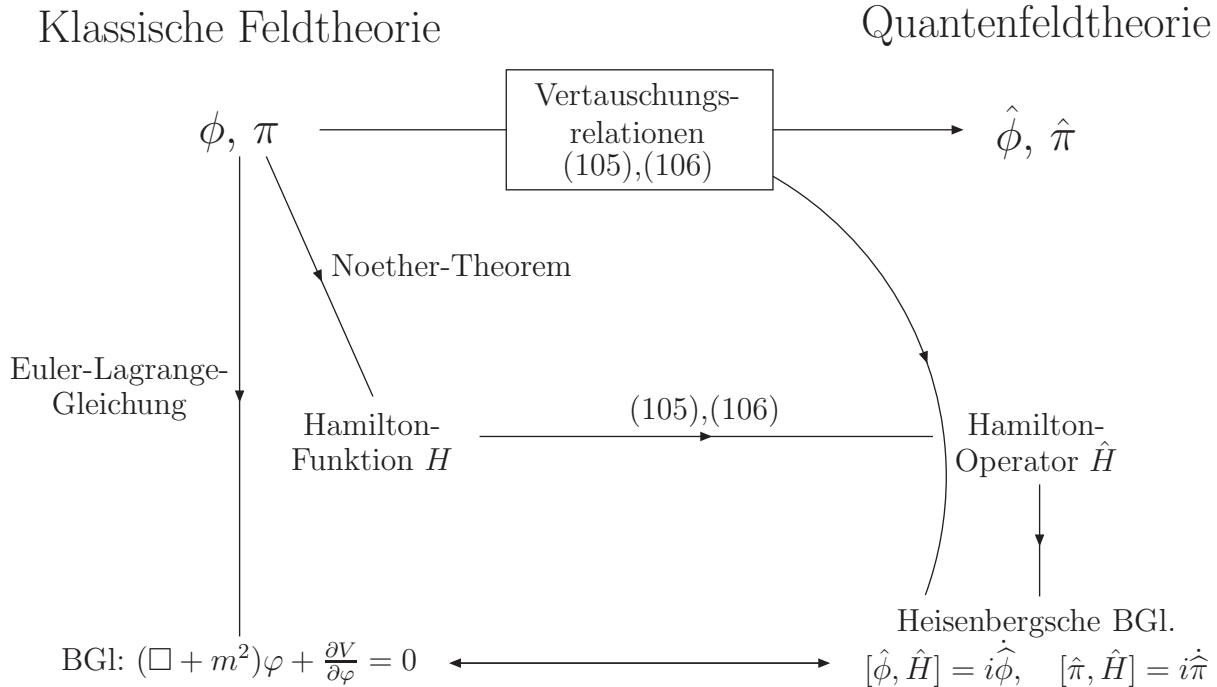
für $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi)$ (89), der Lagrangedichte des wechselwirkenden, reellen KG-Feldes.

Außerdem: (124) \Rightarrow $[\pi(x), H] = i\ddot{\phi}(x) = i\dot{\pi}(x)$

D.h die Zeitentwicklung der Quantentheorie die durch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für die **Feldoperatoren** ϕ und π gegeben ist, reproduziert in (126) das Ergebnis der Euler-

Lagrange-Gleichung. \Rightarrow Konsistenztest, dass kanonische Quantisierung Sinn macht.

Logik:



Der Hamilton-Operator, ausgedrückt durch die Auf- und Absteigeoperatoren, lautet:

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p \left(a_p^+ a_p + \frac{1}{2} [a_p, a_p^+] \right) \quad (127)$$

Der Übergang von der klassischen zur quantisierten Theorie ist nicht eindeutig, weil a_p, a_p^* nur in der klassischen Theorie vertauschen.

\Rightarrow Der Koeffizient von $[a_p, a_p^+]$ ist unbestimmt.

Der Beitrag von $[a_p, a_p^+]$ entspricht der Grundzustandsenergie der ∞ -vielen harmonischen Oszillatoren und muss substrahiert werden, um endliche Energien zu haben. Diese Unbestimmtheit hat keine Auswirkungen, da sie nur den Energienullpunkt verschiebt. Es gilt:

$$[H, a_p^+] = E_p a_p^+ \quad (128a)$$

$$[H, a_p] = -E_p a_p \quad (128b)$$

a_p und a_p^+ sind Vernichter und Erzeuger, aber von was? Der Zustandsraum ist noch nicht bekannt. Wir erreichen den gesamten Hilbertraum durch mehrmaliges anwenden von Erzeugern und Vernichtern.

Grundzustand $|0\rangle$ mit $\langle 0|0\rangle = 1$ ist definiert durch $a_p |0\rangle = 0$ für alle \vec{p} .

Jetzt stellen wir die Verbindung zur Physik her und interpretieren $|0\rangle$ als Vakuum.

Mit

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p a_p^+ a_p \quad (129)$$

findet man die Vakuum-Energie: $\langle 0|H|0\rangle = 0$

D.h. die korrekte Vorschrift in der Behandlung von a_p, a_p^+ in den Noether-Ladungen ist die sogenannte **Normalordnung** bei der die Vernichter rechts von den Erzeugern stehen. Manchmal schreibt man

$$: a_p^+ a_p : \equiv a_p a_p^+ \equiv a_p^+ a_p$$

Was erzeugt nun a_p^+ ?

Definition:

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_p} a_p^+ |0\rangle \\ a_q |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_p} ((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + a_p^+ a_q) |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_p} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) |0\rangle \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} (129) \Rightarrow \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^+ | 0 \rangle \\ &= 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}} | 0 \rangle \\ &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \end{aligned} \quad (131)$$

\Rightarrow Die Normierung ist so, dass $|\vec{p}\rangle$ Dimension -1 hat.

$$\begin{aligned} H |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_p} H a_p^+ |0\rangle \\ &= \sqrt{2E_p} (a_p^+ \underbrace{H |0\rangle}_{=0} + [H, a_p^+] |0\rangle) \stackrel{(128)}{=} \sqrt{2E_p} E_p a_p^+ |0\rangle \\ &= E_p |\vec{p}\rangle \end{aligned} \quad (132)$$

$\Rightarrow |\vec{p}\rangle$ ist Eigenzustand von H mit Energie $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \Rightarrow |\vec{p}\rangle$ ist Einteilchen-Zustand, aus (129) interpretieren wir a_p^+ als den Erzeuger eines Teilchens mit Impuls \vec{p} .

Zwei-Teilchen-Zustand:

$$|\vec{p}, \vec{q}\rangle = \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} a_q^+ a_p^+ |0\rangle = |\vec{q}, \vec{p}\rangle \quad (133)$$

\Rightarrow KG-Feld beschreibt **Bosonen**.

N-Teilchenzustand:

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \dots \sqrt{2E_{p_N}} a_{p_1}^+ \dots a_{p_N}^+ |0\rangle \quad (134)$$

Poincaré-Transformationen $(\Lambda, a) \in \mathcal{P} : x \rightarrow x' = \Lambda x + a$

Zwei Zustände $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$:

$$|\psi'_i\rangle = \underbrace{U(\Lambda, a)}_{\in \text{Darstellung von } \mathcal{P}} |\psi_i\rangle \quad (135)$$

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Amplituden erfordert:

$$\begin{aligned} |\langle \psi'_1 | \psi'_2 \rangle| &\stackrel{!}{=} |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| = |\langle \psi_1 | U^+(\Lambda, a) U(\Lambda, a) | \psi_2 \rangle| \\ \Rightarrow U^+(\Lambda, a) U(\Lambda, a) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$U(\Lambda, a)$ ist unitäre Darstellung von P : $U(\Lambda', a') U(\Lambda, a) = U(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')$

Vakuum-Zustand soll ein Singulett-Zustand sein, also in allen Bezugssystemen gleich:

$$U(\Lambda, a) |0\rangle = |0\rangle$$

Wie transformieren sich Feldoperatoren?

Klassisches Skalarfeld: $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$

Matrixelemente der Feldoperatoren sollen sich wie ein klassisches Feld transformieren:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \phi(x) | \psi_2 \rangle &\stackrel{!}{=} \langle \psi'_1 | \phi'(x') | \psi'_2 \rangle = \langle \psi_1 | U^+(\Lambda, a) \phi'(x') U(\Lambda, a) | \psi_2 \rangle \\ \Rightarrow U^+(\Lambda, a) \phi'(x') U(\Lambda, a) &= \phi(x) \end{aligned} \quad (136)$$

Aus (136) können wir $U(\Lambda, a)$ bestimmen. Zunächst betrachtet man reine Translationen: Suche $U(0, a)$.

$$\begin{aligned} \text{Wähle } x &= 0 \Rightarrow x' = a \\ \Rightarrow \phi'(a) &= U(0, a) \phi(0) U^+(0, a) \end{aligned} \quad (137a)$$

Reine Zeittranslation: $a = (t, 0, 0, 0)$

In (122) fanden wir $i\dot{\phi} = [\phi(x), H]$

Lösung:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \exp(iHt) \phi(x, 0) \exp(-iHt) \\ \text{denn, } -i\dot{\phi} &= -H\phi(x) + \phi(x)H \end{aligned} \quad (137b)$$

Vergleich mit (137a)

$$U(0, a) = \exp(iHa_0) \text{ für } a = (a_0, 0, 0, 0) \quad (138)$$

Analog zur Herleitung von (122) findet man:

$$[\phi(x), \vec{P}] = -i\vec{\nabla}\phi \quad (139)$$

also

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \exp(-i\vec{P}\vec{x}) \phi(0, t) \exp(i\vec{P}\vec{x}) \\ \stackrel{(137a)}{\Rightarrow} U(0, a) &= \exp(-i\vec{P}\vec{a}) \text{ für } a = (0, \vec{a}) \end{aligned} \quad (140)$$

(138) und (140) kombiniert man zu:

$$U(0, a) = \exp(iPa) \quad (141)$$

Für Lorentz-Transformationen können wir genauso verfahren. Die Noether-Ladungen (siehe (99) und (100) für Drehungen) erfüllen Vertauschungsrelationen mit ϕ analog zu (122) und (139). Speziell für Drehungen $\Lambda = \Lambda(0, \vec{\varphi})$:

$$U(\Lambda, 0) = \exp(-i\vec{\varphi}\vec{L}) \quad (142)$$

$$\text{mit } L_k \stackrel{(99)(100)}{=} - \int d^3\vec{x} j_k^0(\vec{x}) = - \int d^3\vec{x} \dot{\phi} (\vec{\nabla}\phi)^\top i J_k \vec{x}$$

Schematisch:

Klassische Feldtheorie	Quantenfeldtheorie
Symmetrie unter $x \rightarrow x', \phi \rightarrow \phi'$ mit Parameter a_k	$\hat{\phi}' = \exp(ia_k \hat{Q}_k) \hat{\phi} \exp(-ia_k \hat{Q}_k)$
\Downarrow	\Uparrow
Noether-Ladungen Q_k erhalten	\hat{Q}_k Operatoren
\Rightarrow	

$$\begin{aligned}
 (122), (139) &\Leftrightarrow [\phi(x), P_\mu] = i\partial_\mu \phi(x) \\
 &\Rightarrow [\pi(x), P_\mu] = [\dot{\phi}, P_\mu] \\
 &= i\partial_\mu \dot{\phi}(x) = i\partial_\mu \pi(x)
 \end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
 (107), (108), (111) &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(\vec{k}, t) = a_{\vec{k}} \exp(-iE_k t) = \exp(iHt) a_{\vec{k}} \exp(-iHt) \\ \exp(-i\vec{p}\vec{x}) a_{\vec{k}} \exp(i\vec{p}\vec{x}) = a_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{x}) \end{array} \right\} \\
 &\Rightarrow \exp(iPx) a_{\vec{k}} \exp(-iPx) = a_{\vec{k}} \exp(-ikx) \Big|_{k_0=E_k}
 \end{aligned} \tag{144}$$

Ein Ein-Teilchen-Zustand transformiert sich also unter unitären Transformationen wie

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}\rangle &\rightarrow |\vec{p}'\rangle = \sqrt{2E_{p'}} a_{p'}^+ |0\rangle \quad (E_{p'} = E_p) \\
 &\stackrel{(144)}{=} \sqrt{2E_p} a_p^+ \exp(ipa) |0\rangle \Big|_{p_0=E_p} \\
 &= \exp(ipa) |\vec{p}\rangle
 \end{aligned} \tag{145}$$

Alternativ: $P^\mu |\vec{p}\rangle = p^\mu |\vec{p}\rangle$ mit $p^0 = E_p \Rightarrow \exp(iPa) |\vec{p}\rangle = \exp(ipa) |\vec{p}\rangle$
 Unter Lorentztransformationen

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x' = \Lambda x \\
 |\vec{p}\rangle &\rightarrow |\vec{p}'\rangle = U(\Lambda, 0) |\vec{p}\rangle = |(\overline{\Lambda p})\rangle \\
 (\overline{\Lambda p}) &: \text{räumliche Komponente von } \Lambda \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- $\frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} = \frac{d^3 \vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$ ist ein Lorentz-invariantes Integrationsmaß: $\frac{d^3 \vec{p}'}{2\sqrt{\vec{p}'^2 + m^2}} = \frac{d^3 \vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$
 D.h. wenn $f(p)$ Lorentz-invariant ist, dann ist auch $\int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} f(p)$ Lorentz-invariant, denn

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dp^0 \delta(p^2 - m^2) &= \int_0^\infty dp^0 \delta(p^0{}^2 - \vec{p}^2 - m^2) \stackrel{x=p^0}{=} \int_0^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} \delta(x - \vec{p}^2 - m^2) = \frac{1}{2E_p} \\
 \text{also : } \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} f(p) &= \int_{p^0 > 0} \underbrace{d^4 \vec{p} \delta(\vec{p}^2 - m^2)}_{\text{Lorentz-invariant}} f(p)
 \end{aligned}$$

2. Orthogonalität der Teilchenzustände

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_M \rangle &\propto \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | a_{\vec{p}_1}^+ \dots a_{\vec{p}_M}^+ | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | a_{\vec{p}_1} \dots a_{\vec{p}_M} | \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N \rangle^* \\
&\propto \langle 0 | a_{\vec{p}_1} \dots a_{\vec{p}_M} a_{\vec{q}_1}^+ \dots a_{\vec{q}_M}^+ | 0 \rangle^*
\end{aligned}$$

Falls ein $\vec{p}_j \notin \{\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N\}$, dann kann man den Erzeuger $a_{\vec{p}_j}$ nach rechts durchtauschen und $a_{\vec{p}_j} a_{\vec{q}_1}^+ \dots a_{\vec{q}_M}^+ | 0 \rangle = a_{\vec{q}_1}^+ \dots a_{\vec{q}_M}^+ a_{\vec{p}_j} | 0 \rangle = 0$.

D.h.

$$\langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_N | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_M \rangle = 0 \Leftrightarrow \{\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N\} \neq \{\vec{p}_1 \dots \vec{p}_M\}$$

Mit unserer Identifikation in (129) als Einteilchen-Zustand mit Impuls \vec{p} , den Vielteilchenzuständen (134), der Fourier-Darstellung (116) und den Vertauschungsrelationen (119),(120) können wir nun alle Matrixelemente der freien Klein-Gordon-Theorie bestimmen. (d.h. die freie KG-Theorie ist exakt lösbar)

1.

$$\begin{aligned}
\phi(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\exp(-ipx) a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ \exp(ipx) \right) \Big|_{p^0=E_p} | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \exp(ipx) | \vec{p} \rangle \\
&= \text{Superposition von Einteilchen-Zuständen,} \\
&\quad \text{die wie ebene Wellen propagieren}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} (a_{\vec{p}'} \exp(-ip'x) + a_{\vec{p}'}^+ \exp(ip'x)) \sqrt{2E_p} a_{\vec{p}}^+ | 0 \rangle \\
\text{Term} &\propto \underbrace{\langle 0 | a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^+ | 0 \rangle}_{=0} = 0 \\
\text{Term} &\propto \langle 0 | a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + \underbrace{a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^+}_{=0} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \\
\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle &= \exp(-ipx) \quad \text{mit } p^0 = E_p \tag{146}
\end{aligned}$$

$\langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle$ hat die Eigenschaften einer Einteilchen-Wellenfunktion

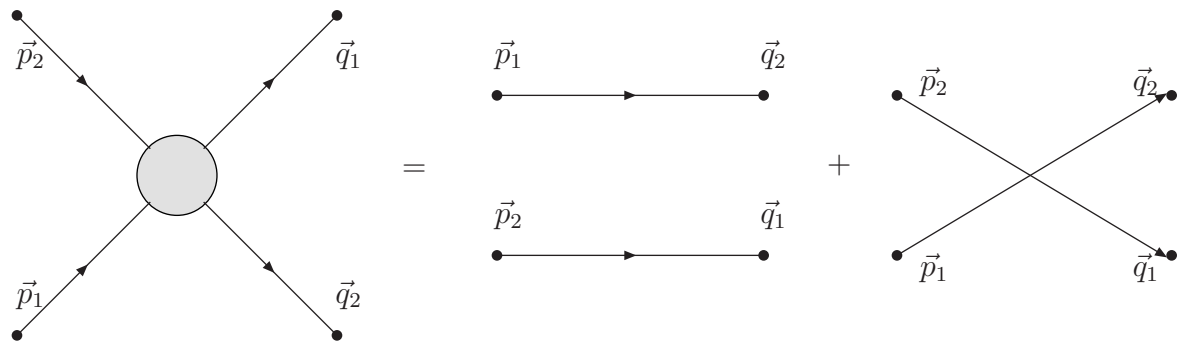
z.B. $(\square + m^2) \langle 0 | \phi(x) | \vec{p} \rangle = 0$

\Rightarrow Kontakt zur relativistischen Quantenmechanik, die auf Probleme mit Energien unterhalb der Paarerzeugungsschwelle $2mc^2$ anwendbar ist.

3. Übergangsamplitude von $|\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$ in $|\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\sqrt{E_{p_1} E_{p_2} E_{q_1} E_{q_2}}} \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle = \langle 0 | a_{q_1} a_{q_2} a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | a_{q_1} a_{p_2}^+ | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) + \langle 0 | a_{q_1} a_{p_1}^+ a_{q_2} a_{p_2}^+ | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) = (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \tag{147}
\end{aligned}$$

Feynman-Diagramme für diesen „Streuprozess“ in der freien KG-Theorie:



Es findet keine Streuung statt, die einzelnen Impulse bleiben erhalten.

Literatur

- [8] Sxl, Roman and Urbantke, Helmuth K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer
- [9] Bargman, Wigner, Proceedings of the National Academy of Sciences, Volume 34, No. 5 (1946) p. 211