

Neutronendiffusion

(Überarbeitete Version)

Fred Stober, Martin Will
Gruppe 106
Betreuer: Eichelhardt, Frank

8. Mai 2006

Zusammenfassung

In diesem Versuch soll die Relaxationslänge schneller Neutronen, sowie die Diffusionslänge thermischer Neutronen in Wasser gemessen werden. Als Neutronenquelle dient ein Am-Be-Präparat.

Inhaltsverzeichnis

I	Theoretische Grundlagen	2
1	Schnelle Neutronen	2
1.1	Wechselwirkungsprozesse	2
1.1.1	Elastische Streuung	2
1.1.2	Inelastische Streuung	2
1.1.3	Absorption	2
1.2	Ausbreitung in Materie	2
1.3	Thermalisierung	3
2	Thermische Neutronen	3
2.1	Ausbreitung in Materie	3
II	Experimentelle Grundlagen	4
3	Neutronenquelle	4
4	Nachweis der Neutronen	4
5	Bestimmung der Relaxationslänge	4
6	Bestimmung der Diffusionslänge	5
III	Versuchsaufbau und Durchführung	6
IV	Auswertung	8
7	Fehleranalyse	8
7.1	Schnelle Neutronen	9
7.2	Thermische Neutronen	9
8	Bestimmung der Relaxationslänge	10
9	Bestimmung der Diffusionslänge	11

Literatur

- [1] F.K. Schmidt und J. Wolf, 2005, *Einführung in das Kernphysikalische Praktikum* („Blaues Buch“)
- [2] H. Kluge and K. Weise, 1982, *The Neutron Energy Spectrum of a $^{241}\text{Am-Be}(\alpha, n)$ Source and Resulting Mean Fluence to Dose Equivalent Conversion Factors*, Radiation Protection Dosimetry 2:85-93

Teil I

Theoretische Grundlagen

1 Schnelle Neutronen

1.1 Wechselwirkungsprozesse

Neutronen, die in Kernreaktionen entstehen, nehmen meist einen Großteil der freiwerdenden Energie in Form von kinetischer Energie auf, weshalb man sie als schnelle Neutronen bezeichnet. Schnelle Neutronen verlieren als ungeladene Teilchen nicht kontinuierlich Energie durch Streuung an den Coulombfeldern der Atome, sondern in der Regel nur in direkten Prozessen mit den Atomkernen. Neutronen können auf drei Arten mit den Kernen wechselwirken, der Wirkungsquerschnitt der Wechselwirkungen steigt dabei mit sinkender Energie.

1.1.1 Elastische Streuung

Stößt ein Neutron auf einen ruhenden Atomkern, so kann es dabei elastisch gestreut werden. Dabei ändert das Neutron seine Richtung und verliert Energie an den Kern. Je leichter der Kern ist, desto stärker kann er vom Neutron aus der Ruhe gebracht werden, was wiederum einen höheren Energieverlust für das Neutron zur Folge hat. Folglich verliert das Neutron beim Stoß mit einem Proton, das ja nur eine geringfügig kleinere Masse hat, am meisten Energie.

1.1.2 Inelastische Streuung

Der Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung ist deutlich geringer als für die anderen beiden Prozesse, d. h. er ist wesentlich unwahrscheinlicher. Dies liegt daran, dass, wie beim elastischen Stoß, Energie an den ruhenden Streupartner übertragen wird, dieser dabei aber auch noch angeregt wird, was einen deutlich höheren Energieverlust für das Neutron bedeutet.

1.1.3 Absorption

Das Neutron kann vom Atomkern gänzlich, unter Aussendung von Photonen oder anderer Teilchen, aufgenommen werden.

Im folgenden werden Neutronen, die noch nicht mit der Materie in Wechselwirkung getreten sind, als Primärneutronen bezeichnet, die bereits gestreuten Neutronen als Sekundärneutronen.

1.2 Ausbreitung in Materie

Der Neutronenfluss ist definiert als die Zahl der Neutronen pro Zeiteinheit und pro Fläche, also $\Phi = \frac{N}{\Delta t \cdot A}$. Für eine punktförmige, monochromatische Quelle schneller Neutronen, die von einem Absorbermaterial umgeben ist, erwartet man folgenden Fluss:

$$\Phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot e^{-\Sigma_t r} = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

r ist dabei der Abstand von der Quelle, Q_0 deren Quellstärke und Σ_t der totale Absorptionskoeffizient, dessen Kehrwert die Relaxationslänge λ darstellt. Der Fluss stellt die Verteilung der Primärneutronen auf einer Kugeloberfläche um die Punktquelle dar, der ein exponentieller Abfall aufgrund der oben angesprochenen Wechselwirkungen im Medium überlagert ist. Die Relaxationslänge ist dabei der Abstand von der Quelle, bei dem der Neutronenfluss auf $e^{-1} \approx 37\%$ des ursprünglichen Flusses abgefallen ist und kann als mittlere Strecke, die die Neutronen zurücklegen können bevor sie mit der Materie wechselwirken, interpretiert werden.

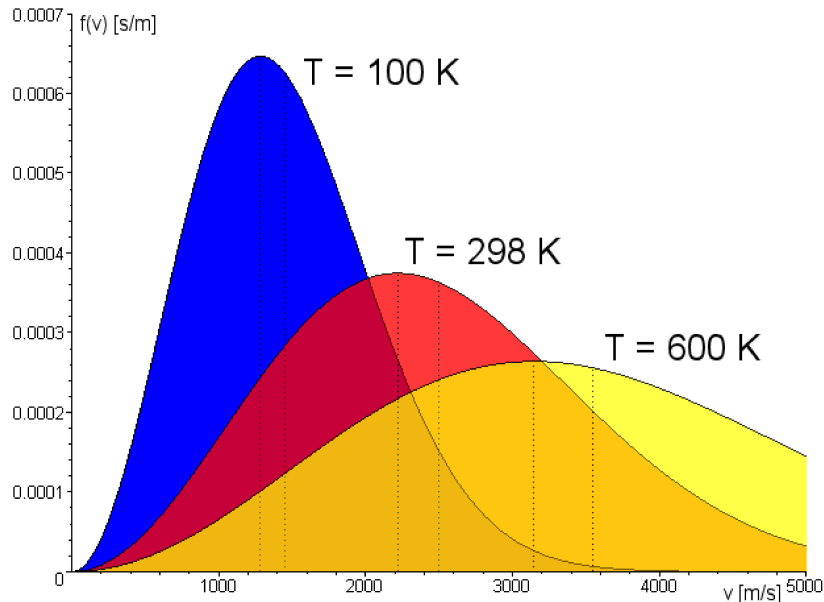
Die Wirkungsquerschnitte der oben angesprochenen Wechselwirkungen sind jedoch stark energieabhängig, weshalb auch die Relaxationslänge von der Energie abhängt. Liegt also keine monochromatische Neutronenquelle, also eine Quelle, die nur Neutronen der selben Energie aussendet, vor, so hat dies eine Abweichung des gemessenen Flusses vom Vorhergesagten zur Folge. Weiterhin stellt der Fluss nur die Primärneutronen dar. Bei einer Messung kann man diese jedoch nicht von den Sekundärneutronen unterscheiden. Diese Problematik wird in den experimentellen Grundlagen weiter erörtert.

1.3 Thermalisierung

Die schnellen Neutronen verlieren so lange Energie durch Stöße, bis sie ihre gesamte überschüssige kinetische Energie an die Atomkerne abgegeben haben. Dieser Vorgang nennt sich Thermalisierung, die Neutronen bezeichnet man nun als thermalisiert bzw. thermisch.

2 Thermische Neutronen

Thermalisierte Neutronen stehen im thermischen Gleichgewicht mit der Materie und gehorchen somit der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung.



Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung von Neutronen bei verschiedenen Temperaturen. Es sind jeweils die wahrscheinlichste, sowie die mittlere Geschwindigkeit eingezeichnet.

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Temperatur ist gegeben durch $v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$, die zugehörige Energie durch $E = k_B T$. Bei Zimmertemperatur, also $T = 298 \text{ K}$, ergibt sich $v_T = 2216,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E = 0,026 \text{ eV}$.

2.1 Ausbreitung in Materie

Da thermische Neutronen im Gleichgewicht mit der Materie stehen tauschen sie in wiederholten Stoßprozessen Energie mit den Atomkernen aus. Dies hat einerseits zur Folge, dass die Neutronen sich nicht mehr auf geradlinigen Bahnen ausbreiten wie die schnellen Primärneutronen, sondern konfuse Zick-Zack-Bewegungen („random walk“) ausführen. Desweiteren spielt nur noch die Absorption als flusshemmende Wechselwirkung eine Rolle.

Ein solches System wird in der Diffusionstheorie mit der Boltzmannschen Transportgleichung beschrieben, die für den stationären Fall mit $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ verwendet wird:

$$D\Delta\Phi(r) - \Sigma_a\Phi(r) + S(r) = 0$$

Dabei wird die Diffusionskonstante $D = (3\Sigma_s)^{-1}$, die Quelldichte $S(r)$, der Absorptionsquerschnitt Σ_a , und der Streuquerschnitt Σ_s verwendet. Für den Fluss einer punktförmigen Quelle thermischer Neutronen findet man mit $L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$ folgende Lösung:

$$\Phi = \frac{Q_0}{4\pi Dr} \cdot e^{-\frac{r}{L}}$$

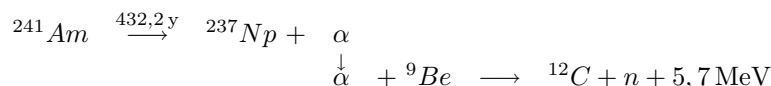
Der deutlichste Unterschied zur Ausbreitung der schnellen Neutronen, und typisch für Diffusionsfelder, ist der langsamere Abfall mit $\frac{1}{r}$. Der exponentielle Abfall ist wie erwähnt lediglich auf Absorption zurückzuführen, sodass die Größe L , die Diffusionslänge, ein Maß für den mittleren Abstand von der Neutronenquelle ist, an der ein thermisches Neutron vom Medium absorbiert wird.

Teil II

Experimentelle Grundlagen

3 Neutronenquelle

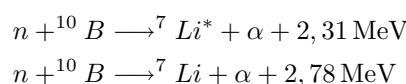
Als Neutronenquelle wird ein Americium-Beryllium-Gemisch verwendet. Das Americium zerfällt unter Aussendung eines α -Teilchen mit 5,49 MeV, das vom Beryllium eingefangen werden kann. Dabei entsteht ein schnelles Neutron. Die Reaktionskette sieht demnach wie folgt aus:



Die freiwerdende Energie von 5,7 MeV wird dabei hauptsächlich vom leichteren Neutron mitgenommen. Das Energiespektrum der Neutronen ist kontinuierlich, da es in alle möglichen Richtungen emittiert werden kann. Die maximale Energie, die auf das Neutron übertragen werden kann, ist $E_{\max} = 5,49\text{ MeV} + 5,7\text{ MeV} = 11,19\text{ MeV}$ für den Fall, dass das Neutron in Vorwärtsrichtung des einlaufenden α -Teilchens ausgesendet wird. Die wahrscheinlichste Neutronenenergie liegt jedoch bei ungefähr $E = 5\text{ MeV}$. Ein genaues Energiespektrum dieser Art von Quelle findet sich in [2].

4 Nachweis der Neutronen

Zum Nachweis der Neutronen wird ein Proportionalzählrohr verwendet, das mit BF_3 gefüllt ist. Das Neutron wird dabei vom Bor eingefangen, welches unter Aussendung eines α -Teilchens in Lithium übergeht:



Der erste Zerfall in einen angeregten Zustand des Lithiums ist dabei mit 97% deutlich wahrscheinlicher. Der Wirkungsquerschnitt der beiden Zerfälle nimmt mit sinkender Energie zu, d. h. es werden praktisch nur langsame, also thermische Neutronen gemessen. Die beiden Reaktionsprodukte, ${}^7\text{Li}$ und das α -Teilchen, sind nun im Gegensatz zum einlaufenden Neutron und zum Bor elektrisch geladen. Sie wandern nun zu den Anoden- und Kathodendrähten des Zählrohrs und lösen einen Impuls aus, der über die angeschlossene Zähl Elektronik verstärkt und zum PC weitergeleitet wird. Da beide Endprodukte des Zerfalls registriert werden können erwartet man im Spektrum der registrierten Zerfälle einen deutlich ausgeprägten Peak, der einer Energie von 2,31 MeV entspricht, sowie einen weniger stark ausgeprägten Peak bei 2,78 MeV.

5 Bestimmung der Relaxationslänge

Wie bereits erwähnt gehorcht der Fluss der schnellen Primärneutronen der Beziehung

$$\Phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

Setzt man die Definition des Flusses ein, multipliziert mit r^2 und wendet die Logarithmengesetze an findet man folgende Gleichung:

$$\frac{N}{\Delta t \cdot A} = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}$$
$$N \cdot r^2 = \frac{Q_0 \cdot \Delta t \cdot A}{4\pi} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}$$
$$\ln(N \cdot r^2) = \ln\left(\frac{Q_0 \cdot \Delta t \cdot A}{4\pi}\right) + \ln\left(e^{-\frac{r}{\lambda}}\right)$$
$$\ln(N \cdot r^2) = -\frac{r}{\lambda} + C$$

Quellstärke Q_0 , Detektorfläche A , sowie das Zeitintervall Δt verschwinden in der Konstanten C . Trägt man also den Logarithmus der Zahl der schnellen Primärneutronen mal dem Quadrat des Abstands über dem Abstand auf, so ist die Steigung der Ausgleichsgeraden die inverse Relaxationslänge.

Nun kann das verwendete Zählrohr lediglich langsame Sekundärneutronen registrieren. Diese thermischen Neutronen bewegen sich jedoch nicht sehr weit vom Ort ihres Entstehens weg, weniger als 10% driften mehr als 3 cm weit. Dies hängt mit dem Wirkungsquerschnitt der Absorption der Neutronen im Medium zusammen, der mit sinkender Energie der Neutronen stark ansteigt. Man kann also grob sagen, dass in unmittelbarer Umgebung eines gemessenen thermischen Neutrons ein schnelles Neutron zugegen war, das thermalisiert wurde. Es kann also für den Fluss der gemessenen Neutronen die selbe Beziehung wie für schnelle Neutronen angewendet werden.

6 Bestimmung der Diffusionslänge

Im Prinzip führt man für die oben gefundene Beziehung für den Fluss der thermischen Neutronen die selben Umformungen wie beim Fluss der schnellen Neutronen durch und erhält:

$$\Phi = \frac{Q_0}{4\pi Dr} \cdot e^{-\frac{r}{L}}$$

$$\Rightarrow \ln(N \cdot r) = -\frac{r}{L} + C$$

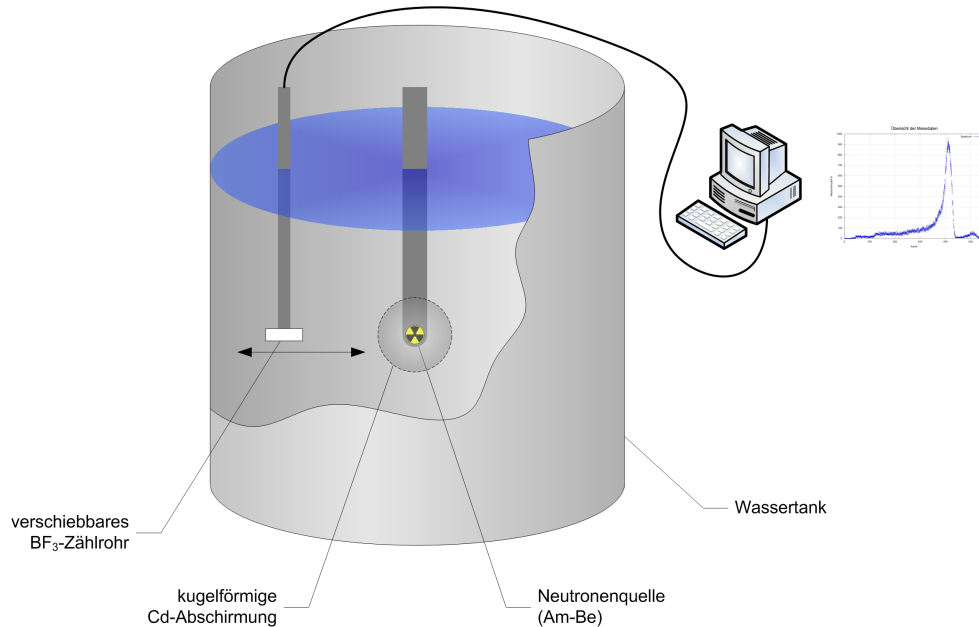
Nun müsste man eigentlich auch wieder nur die Neutronen einer Punktquelle thermischer Neutronen zählen, die Ausgleichsgerade bestimmen und die Diffusionslänge berechnen. Der Haken an der Sache ist nur, dass es keine punktförmige Quelle thermischer Neutronen gibt, die langsamen Neutronen in unserer Versuchsanordnung entstehen überall durch Thermalisierung schneller Neutronen.

Mit der Cadmium-Differenzmethode kann man diese Problematik umgehen. Cadmium hat die Eigenschaft, thermische und langsame Neutronen bis zu etwa 0,5 eV stark zu absorbieren. Um die Quelle wird daher eine Cadmiumkugel angebracht, die die langsamen Neutronen, die innerhalb der Kugel durch Thermalisierung schneller Neutronen entstanden sind, absorbiert. Zählt man nun also wie bei der Bestimmung der Relaxationslänge die Zahl der Neutronen und zieht diese von der Zählrate ohne Kugel beim selben Abstand ab, so erhält man eine Zählrate, die den thermischen Neutronen entspricht, die von der Kugel absorbiert wurden. Man hat also eine virtuelle Quelle thermischer Neutronen, die ab einem hinreichend großen Abstand (wir verwenden 14 cm) als punktförmig betrachtet werden kann.

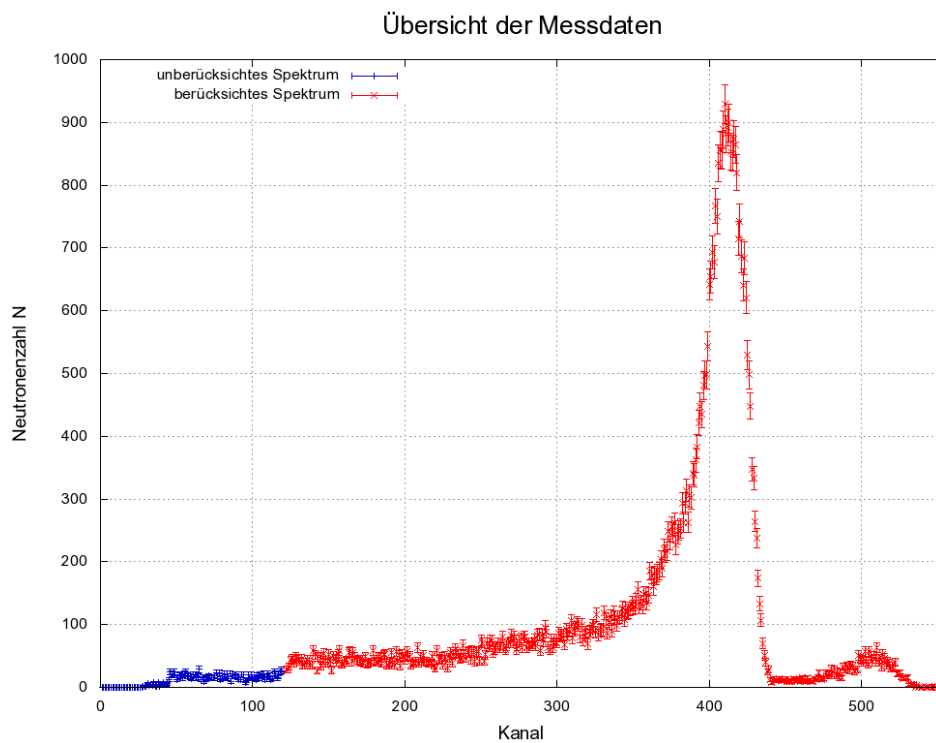
Teil III

Versuchsaufbau und Durchführung

Quelle und Zählrohr sind in einem zylinderförmigen Wassertank angebracht. Das Zählrohr kann auf einer Schiene an der Oberseite des Tanks verschoben werden, die Quelle kann zum Befestigen der Cadmiumkugel aus dem Tank herausgeholt werden.



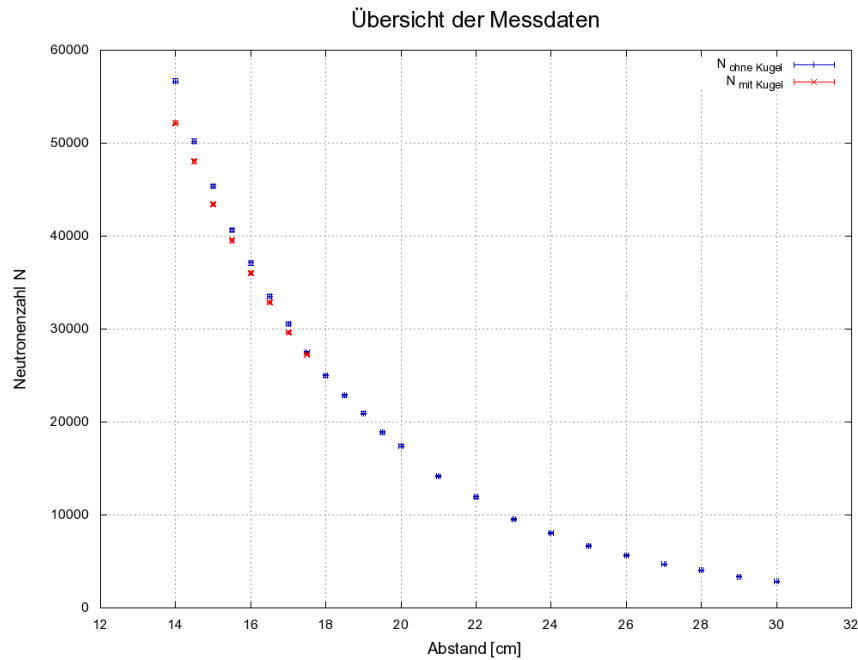
Am PC kann die gewünschte Dauer der Messung eingestellt werden, nach Beendigung der Messung kann die Gesamtzahl der registrierten Neutronen abgelesen und das Spektrum gespeichert werden. Es ergibt sich das erwartete Spektrum mit den beiden Peaks:



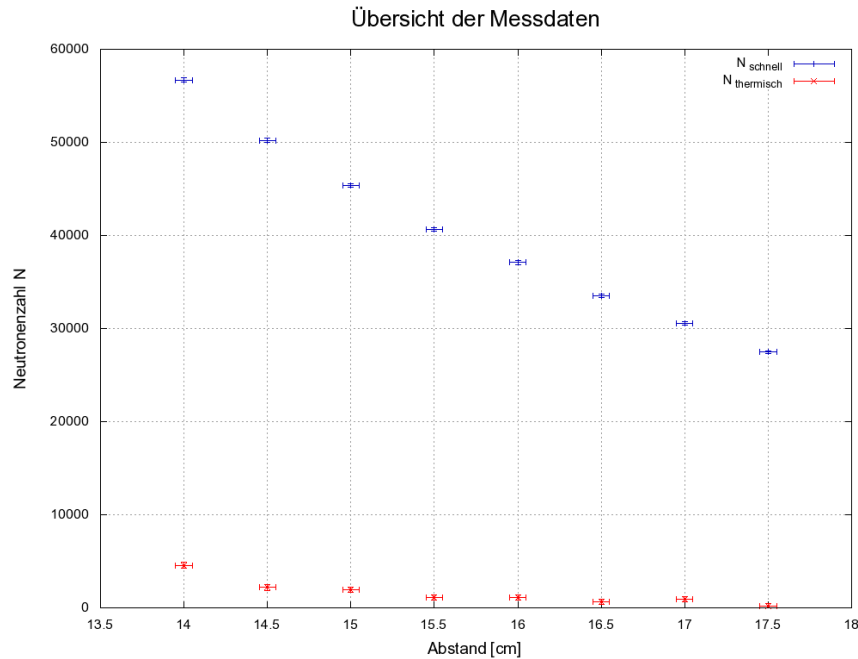
Die Messung wurde im Abstand von 14–20 cm in Schritten von 0,5 cm mit und ohne Cadmiumkugel, sowie von 20–30 cm in 1 cm-Schritten durchgeführt. Da sich die Fehler $\sigma_{m/o}$ auf die Einzelzählraten $N_{m/o}$ mit und ohne Cd-Kugel bei der Differenzmethode addieren (siehe Abschnitt zur Fehlerrechnung), ist es

sinnvoll die Messung mit Cd-Kugel abzubrechen, wenn der Fehler σ_{diff} größer wird als die Differenz der Zählraten. Bei uns war dies bei einem Abstand von 17,5 cm der Fall.

Es wurden folgende Zählraten für die Abstände mit und ohne Kugel diese Zählraten gemessen¹:



Aus den obigen Messdaten mit und ohne Kugel wurden wie im Abschnitt über die Cadmium-Differenzmethode beschreiben die Messdaten für schnelle und thermische Neutronen bestimmt:



Um den Fehler auf die Messung zu minimieren, hätte die Messung bei jedem Abstand zunächst ohne und dann mit Cadmiumkugel – oder umgekehrt – durchgeführt werden können. Dies hätte jedoch durch das ständige Montieren der Kugel die Dauer der Versuchsdurchführung unnötig verlängert, sodass der, durch nicht exakt gleiche Abstände verursachte, geringfügig größere Fehler in Kauf genommen wurde.

Es ist weiter zu bemerken, dass sich das Maximum des Spektrums vermutlich durch Aufladungseffekte im Laufe der Zeit in den niederenergetischen Bereich verschoben hat. Wir versuchten durch eine behelfsmäßige Erdung des Tanks und regelmäßiges abschalten der Geräte dem entgegenzuwirken, hatten jedoch keinen bzw. nur kurzfristigen Erfolg damit.

¹Die genauen Zahlen befinden sich im Anhang.

Teil IV

Auswertung

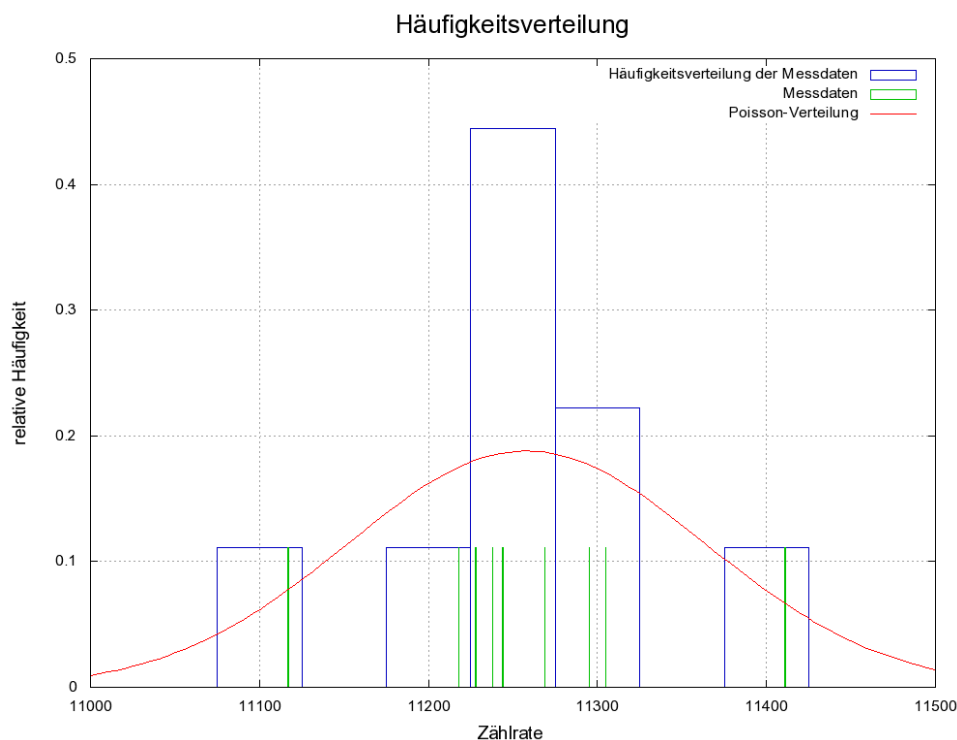
7 Fehleranalyse

Bei diesem Versuch gibt es eine große Zahl an Angriffspunkten für Fehler. So sind keinerlei systematische Fehler für die Messinstrumente bekannt. Weiterhin arbeiten wir unter oben beschriebenen, idealisierten Annahmen (punktförmige Quelle, usw.). Auch verschleißt sich die oben beschriebene Verschiebung des Maximums des Spektrums, die die gemessene Zählrate beeinflusst, einer analytischen Behandlung. Im folgenden werden daher nur statistische Fehler, die auch analytisch behandelt werden können, berücksichtigt.

Für den Fehler auf die Abstandsmessung gehen wir von $\sigma_{\Delta r} = 0,05$ cm aus, da eine Millimeterskala zur Verfügung stand (der systematische Fehler auf den Nullpunkt wird nicht berücksichtigt). Der Fehler auf die Zählrate berechnet sich zu $\sigma_N = \sqrt{N}$. Dies kommt von der Annahme, dass die Zählrate poissonverteilt ist. Um dies zu überprüfen, wurden neun Messungen mit einer Dauer von einer Minute durchgeführt. Der Mittelwert $\bar{N} = 11258,3$ der Zählraten wurde bestimmt und die Werte wurden in ein Histogramm mit einer Binbreite von 50 eingeteilt. Danach wurde zum Vergleich eine Poisson-Verteilung eingezeichnet

$$f(x) = \frac{\bar{N}^x}{x!} \exp(-\bar{N}) \approx \frac{\exp(x \cdot \log(\frac{m}{x}) + x - m)}{\sqrt{2\pi x}}$$

Diese Funktion verwendet in unserem Fall sehr große Werte von x , die bei der Auswertung der Fakultät bzw. Gammafunktion numerische Probleme bereitete. Daher wurde die Fakultät mit Hilfe der Stirling-Formel approximiert. Wir erhielten damit folgendes Diagramm:



Hierbei sind noch zusätzlich die eigentlichen Messdaten als Impulse eingezeichnet. Es wird jedoch auch deutlich, dass mit der geringen Zahl an Messdaten, die zusätzlich noch gebinnt werden mussten, keine fundierte Aussage über die befolgte Statistik möglich ist.

Unter uns gesagt sieht es aber gar nicht schlecht aus...

Um die Fehler auf berechnete Größen $f(x_1, \dots, x_n)$ zu erhalten, wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung verwendet:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

7.1 Schnelle Neutronen

Für die schnellen Neutronen wird die Formel $y_s = \ln(r^2 N_o) = -a \cdot x + b$ verwendet. Mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung wird der Fehler auf $y(r, N)$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_s} &= \sqrt{\left(\frac{2rN_o}{r^2 N_o} \sigma_r \right)^2 + \left(\frac{r^2}{r^2 N_o} \sigma_{N_o} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{r} \sigma_r \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_o}}{N_o} \right)^2} \\ \sigma_{y_s} &= \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{N_o}} \end{aligned}$$

7.2 Thermische Neutronen

Zuerst wird der Fehler auf die Differenz $N_{diff} = N_o - N_m$ zwischen der Messung mit Kugel N_m und ohne Kugel N_o berechnet:

$$\sigma_{diff} = \sqrt{\sigma_o^2 + (-\sigma_m)^2} = \sqrt{N_o + N_m}$$

Weiter wird nun die Formel $y_{th} = \ln(r N_{diff}) = -a \cdot x + b$ verwendet:

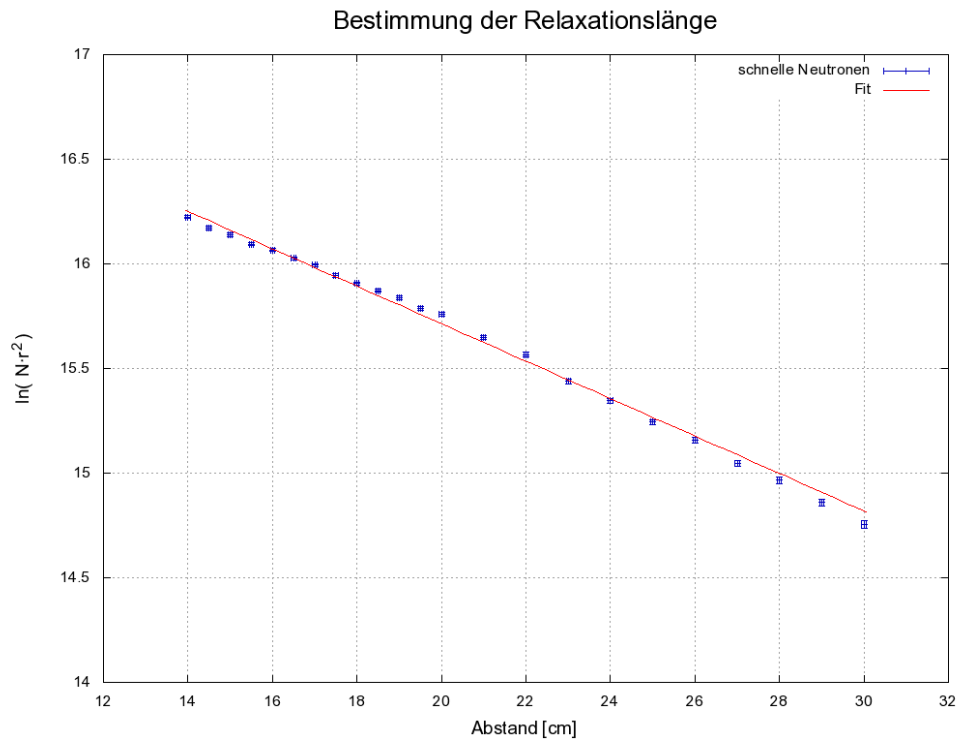
$$\begin{aligned} \sigma_{y_{th}} &= \sqrt{\left(\frac{N_{diff}}{r N_{diff}} \sigma_r \right)^2 + \left(\frac{r}{r N_o} \sigma_{N_{diff}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_{diff}}}{N_{diff}} \right)^2} \\ \sigma_{y_{th}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r} \right)^2 + \frac{N_o + N_m}{(N_o - N_m)^2}} \end{aligned}$$

Bei beiden Versuchsteilen interessiert uns der Wert $m = a^{-1}$, dessen Fehler gegeben ist durch:

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a^2} \right)^2} = \left| \frac{\sigma_a}{a^2} \right|$$

8 Bestimmung der Relaxationslänge

Wie oben beschrieben wird $\ln(N \cdot r^2)$ über r aufgetragen und aus der durch gewichtete Regression bestimmten Ausgleichsgeraden die Relaxationslänge λ bestimmt.



Für die angepasste Gerade $-a \cdot r + b$ erhielten wir:

$$a = 0,089 \pm 0,001 \text{ cm}^{-1}$$

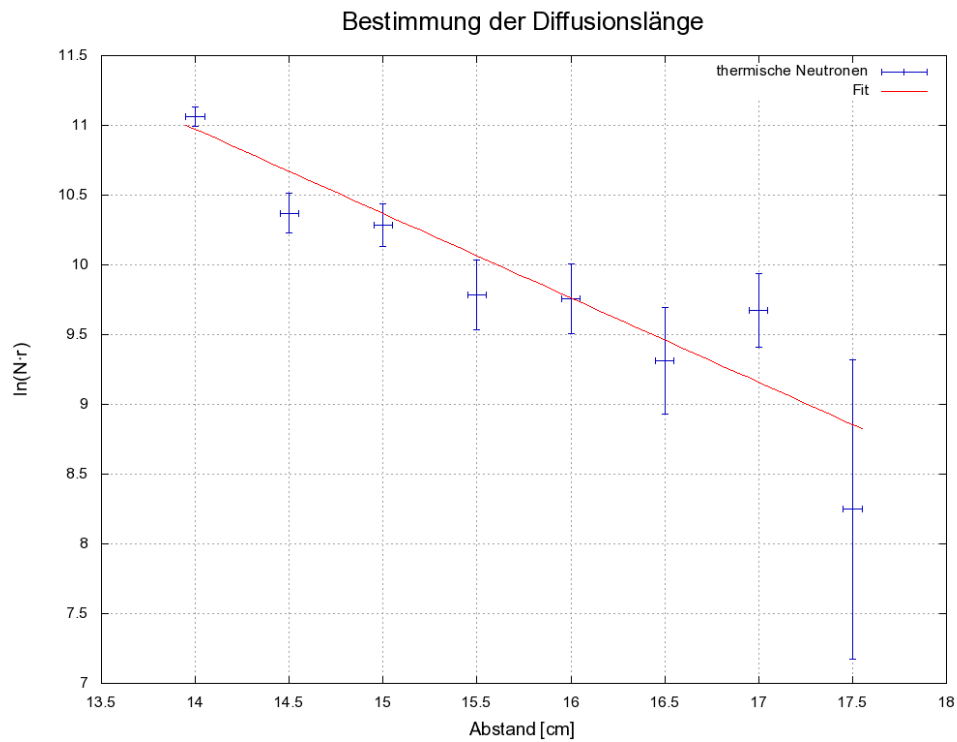
$$b = 17,5 \pm 0,03$$

Aus der Steigung a lässt sich nun die Relaxationslänge λ der schnellen Neutronen in Wasser bestimmen:

$$\lambda = \frac{1}{a}, \quad \sigma_\lambda = \frac{\sigma_a}{a^2}$$
$$\Rightarrow \lambda = 11,2 \pm 0,2 \text{ cm}$$

9 Bestimmung der Diffusionslänge

Hier wurde diesmal $\ln(N \cdot r)$ über r aufgetragen und eine Ausgleichsgerade angepasst.



Dabei ergaben sich für die Steigung a und den y-Achsenabschnitt b der Gerade diese Werte:

$$a = 0,60 \pm 0,09 \text{ cm}^{-1}$$

$$b = 19,4 \pm 1,3$$

Mit dem Parameter a kann man die Diffusionslänge L der thermischen Neutronen in Wasser berechnen:

$$L = \frac{1}{a}, \quad \sigma_L = \frac{\sigma_a}{a^2}$$
$$\Rightarrow L = 1,65 \pm 0,25 \text{ cm}$$

Sowohl der Wert für die Relaxationslänge als auch die Diffusionslänge liegt im erwarteten Bereich.