

# Halleffekt

Martin Will, Fred Stober  
Gruppe 106  
Betreuer: Dr. Grün

5. Dezember 2005

## Zusammenfassung

Es wird mit einer Leitfähigkeits- und Hallspannungsmessung die Ladungsträgerdichte und Mobilität zweier Proben in Abhängigkeit der Temperatur untersucht. Die erste Probe ist ein Germanium-Volumenkristall und die zweite ein Galliumarsenid-Halbleiter, dessen Struktur die Behandlung als 2-dimensionales Elektronengas ermöglicht.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1	Fermi-Statistik . . . . .	2
1.2	Bändermodell . . . . .	2
1.2.1	Isolatoren . . . . .	3
1.2.2	Leiter / Metall . . . . .	3
1.2.3	Halbleiter . . . . .	3
1.3	Ladungsträgerkonzentration . . . . .	4
1.4	Ladungsträgerstreuung und Mobilität . . . . .	5
1.4.1	Streuung an Störstellen . . . . .	6
1.4.2	Streuung an Gitterschwingungen / Phononen . . . . .	6
1.5	Leitfähigkeit . . . . .	6
1.6	Halleffekt bei Elektronen- und Löcherleitung (bipolare Leitung) . . . . .	7
1.6.1	Bipolare Leitung . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Experimentelle Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Versuchsaufbau und Messung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>10</b>
3.1	Fehlerabschätzung . . . . .	10
3.1.1	B-Feld . . . . .	10
3.1.2	Strom- und Spannungsmessungen . . . . .	10
3.1.3	Temperaturmessung . . . . .	10
3.2	Probe A (Germanium) . . . . .	10
3.2.1	Berechnung der Leitfähigkeit und des Hallkoeffizienten . . . . .	10
3.2.2	Darstellung des Hallkoeffizienten und der Mobilität . . . . .	11
3.2.3	Leitungstyp im extrinsischen Bereich . . . . .	12
3.2.4	Berechnung der Ladungsträgerkonzentration im intrinsischen Bereich . . . . .	12
3.2.5	Arrheniusdiagramm . . . . .	12
3.3	Probe B (Galliumarsenid) . . . . .	14
3.3.1	Berechnung der Leitfähigkeit und des Hallkoeffizienten . . . . .	14
3.3.2	Darstellung und Modellierung der Mobilität . . . . .	14
3.4	Vergleich der Mobilitäten von Probe A und Probe B . . . . .	16

## Literatur

[Bilder] <http://de.wikipedia.org>

[Bilder] <http://www-solidstate.physik.uni-bremen.de>

[1] L.J. van der Pauw: Philips Technical Review, Volume 26

[2] Demtröder, Experimentalphysik 3. Springer Verlag

[3] <http://www.ioffe.rssi.ru/SVA/NSM/Semicond/GaAs/optic.html>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Fermi-Statistik

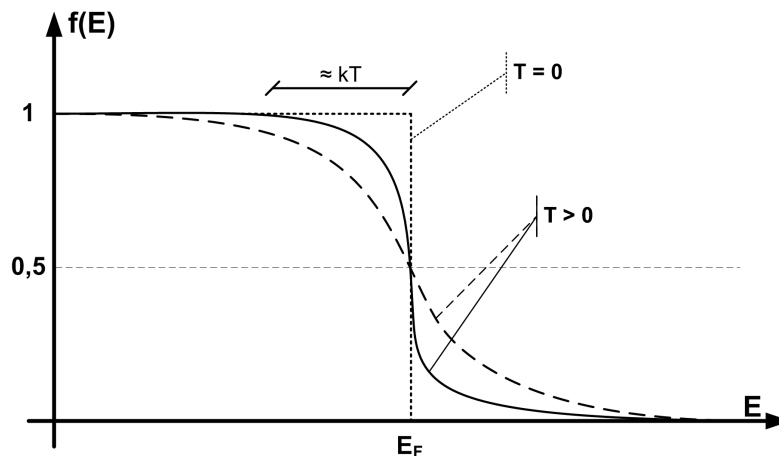
Die Fermi-Statistik beschreibt Teilchen mit halbzahligen Spin, also Fermionen. Die zentrale Aussage der Fermi-Statistik ist es, dass die Wellenfunktion eines  $n$ -Teilchen-Systems total antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Teilchen ist. Als Folgerung daraus ergibt sich, dass die Besetzungsstatistik für Fermionen durch die Fermi-Verteilung gegeben ist.

Betrachtet man also die Besetzung der Energieniveaus der Elektronen in einem Halbleiter, so muss diese durch die Fermi-Verteilung (oder Fermi-Dirac-Verteilung) beschrieben werden. Wie oben beschrieben, können aufgrund des Ausschließungsprinzips (Pauli-Prinzip), nicht alle Elektronen den Grundzustand annehmen. Betrachtet man zunächst ein System ohne thermische Anregungen ( $T = 0$ ), so füllen die Elektronen die vorhandenen Energieniveaus lückenlos von unten bis zu einer Grenze  $E_F$ , der Fermi-Energie auf. Wird nun ein System ( $T > 0$ ) betrachtet, so können durch thermische Anregungen Elektronen in einen höheren Energiezustand angehoben werden. Dabei ist die Fermi-Energie nun genau die Energie, bei der die Wahrscheinlichkeit einen Zustand zu besetzen 50% beträgt. Die Besetzungswahrscheinlichkeit  $f(E)$  für einen Zustand der Energie  $E$  ist allgemein gegeben durch

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

Die Verteilung ist im folgenden Diagramm graphisch dargestellt für verschiedene Temperaturen. Im Grenzfall hoher Energien  $E \gg E_F$  geht die Fermi-Verteilung über in die Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

$$f_{MB}(E) = \exp\left(-\frac{E-E_F}{k_B T}\right)$$



Fermi-Verteilung

## 1.2 Bändermodell

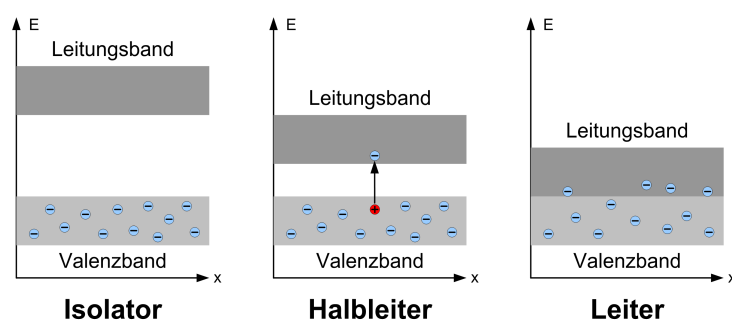
Betrachtet man die Energiezustände von zwei (gleichen) Atomen, die man genügend dicht zusammenbringt, so spalten atomare Energieniveaus auf in zwei Molekülniveaus (ein bindendes und ein antibindendes). Bringt man analog dazu  $N$  gleiche Atome zusammen, so spalten die sich entsprechenden atomaren Niveaus (gleicher Energie) auf in  $N$  Niveaus.

Für große  $N$  und einer periodischen Anordnung von gleichen Atomen, wie es z. B. in einem Kristall vorliegt, so liegen die Energieniveaus so dicht zusammen, dass man die beieinanderliegenden Energieniveaus als Kontinuum betrachten kann, die man als Energiebänder bezeichnet. Die verschiedenen Energiebänder werden durch die sogenannten Bandlücken getrennt.

Die Besetzung der Energieniveaus erfolgt von unten an, gemäß der oben beschriebenen Fermi-Verteilung.

Durch die Besetzung der Bänder können Festkörper in Isolatoren, Halbleiter und Leiter klassifiziert werden. Das Valenzband ist dabei das höchste Energieband, das für  $T = 0$  von den Elektronen voll besetzt ist. Das energetisch darüberliegende Band nennt man Leitungsband. Im Leitungsband können sich die Elektronen frei bewegen, im Valenzband sind sie fest gebunden. Für  $T > 0$  werden Elektronen gemäß der Fermi-Verteilung durch thermische Anregung vom Valenz- ins Leitungsband gehoben.

Auf diese Weise kann ein zuvor unbesetztes Leitungsband teilweise besetzt werden. In den teilweise besetzten Bändern können nun Ladungen transportiert werden, also ein Strom fließen.



### 1.2.1 Isolatoren

Ein Isolator zeichnet sich durch ein unbesetztes Leitungsband aus, bei dem die Bandlücke zum Valenzband mehrere eV beträgt, so dass Elektronen praktisch nicht vom Valenz- in das Leitungsband angeregt werden können.

### 1.2.2 Leiter / Metall

Der Leiter ist dadurch ausgezeichnet, dass Valenz- und Leitungsband sich teilweise überlappen, so dass die Elektronen auch ohne thermische Anregung im Leitungsband zum Stromfluss beitragen können. Thermische Anregung führt bei einem Leiter im Allgemeinen nicht zu einer Erhöhung der Leitfähigkeit, da durch Elektronenstreuung am Gitter die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen abnimmt.

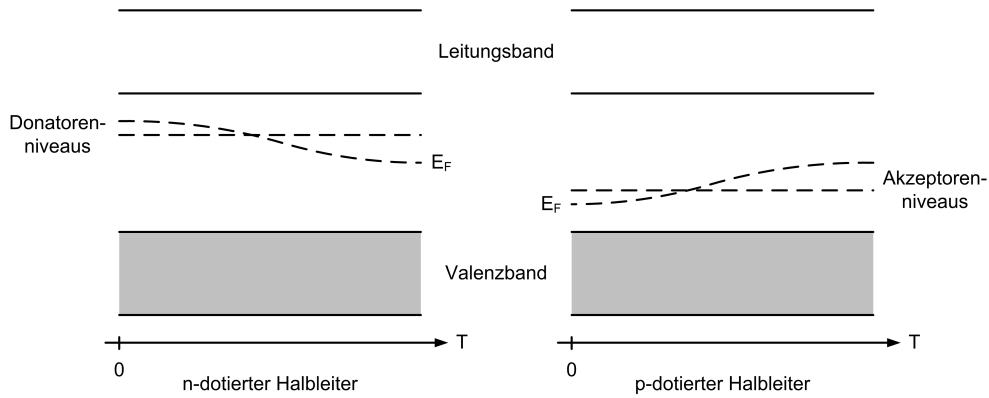
### 1.2.3 Halbleiter

Bei Halbleitern ist bei  $T = 0$  das Valenzband voll besetzt und das Leitungsband leer, weshalb reine Halbleiter am absoluten Temperaturnullpunkt nicht leiten, das Fermi-niveau liegt irgendwo in der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband. Diese ist jedoch relativ klein (Si:  $1,10 \text{ eV}$ , GaAs:  $1,4 \text{ eV}$ ), weshalb schon bei geringen Temperaturen Elektronen durch thermische Anregung in das Leitungsband wechseln können und für Leitfähigkeit sorgen. Dieser Effekt nimmt mit steigender Temperatur zu, weshalb Halbleiter auch Heißleiter genannt werden. Weitere Elektronen können z.B. aufgrund eines elektrischen Feldes zur Leitfähigkeit beitragen. Die beim Wechsel ins Leitungsband hinterbliebenen Defektelektronen bzw. Löcher im Valenzband können ebenfalls zur Erklärung der Leitung herangezogen werden.

**Direkte und indirekte Halbleiter** Weiterhin kann man Halbleiter in direkte und indirekte Halbleiter einteilen. Hierzu betrachtet man das Bändermodell im Impulsraum. Für ein Elektron ist es energetisch am günstigsten bei der Anregung vom Maximum des Valenzbandes zum Minimum des Leitungsbandes zu wechseln. Liegen diese Extrema beim selben Quasiimpuls, so kann diese Anregung durch ein Photon geschehen und man spricht von einem direkten Übergang. Muss das Elektron beim Übergang eine Differenz im Quasiimpuls überwinden, so ist zusätzlich ein Phonon nötig, um dem Elektron den fehlenden Impuls zuzuführen. Dieser Übergang ist also indirekt, dementsprechend werden solche Verbindungen indirekte Halbleiter genannt.

**Dotierung** In mikroelektronischen Bauteilen möchte man meist eine höhere Leitfähigkeit als die von intrinsischen Halbleitern erreichte. Hierzu kann man in den Atomverbund Fremdatome einbauen. Diese tragen durch zusätzliche oder fehlende Außenelektronen zur besseren Leitfähigkeit bei. Man unterscheidet zwischen n- und p-dotierten Halbleitern.

Bei der n-Dotierung bringt man Fremdatome mit mehr (beispielsweise 5) Valenzelektronen in den Kristall ein. Diese Elektronen sind nur schwach gebunden und können relativ leicht ins Leitungsband wechseln. Die Fremdatome, die dieses zusätzliche Elektron abgeben, werden Donatoren genannt. Sie liegen energetisch auf einem Niveau, das knapp unterhalb der Leitungsbandkante liegt. Da bei tiefen Temperaturen die Leitfähigkeit nur aufgrund der Donatorelektronen zustande kommt, liegt das Fermi-niveau zwischen Donator-niveau und Leitungsband. Mit zunehmender Temperatur steigt die Wahrscheinlichkeit, dass Elektronen aus dem Valenzband angeregt werden und die Fermienergie nähert sich der eines undotierten Halbleiters an.



n-dotierte Halbleiter werden mit Fremdatomen dotiert, die weniger Außenelektronen besitzen, die also sozusagen ein Defektelektron in den Halbleiter einfügen. Diese Atome können Valenzelektronen der Halbleiteratome aufnehmen, weshalb man sie Akzeptoren nennt. Sie liegen energetisch nahe über der Valenzbandkante. Schon bei geringen Temperaturen können nun Valenzelektronen von den Akzeptoratomen aufgenommen werden, weshalb die Fermienergie zwischen Akzeptor- und Valenzbandniveau liegt. Ähnlich den n-dotierten nähert sich auch das Fermi-niveau der p-dotierten Halbleiter mit steigender Temperatur der eines undotierten Halbleiters an. Die steigende Leitfähigkeit kann bei p-dotierten Halbleitern durch den Defektelektronenstrom erklärt werden, da im Valenzband Löcher zurückbleiben, die als positive Ladungsträger aufgefasst werden können.

**Extrinsische Leitung** Die extrinsische Leitung bezeichnet den durch eingebrachte Fremdatome (z. B. durch Dotierung), also Donatoren bzw. Akzeptoren, verursachten Stromfluss. Da die Elektronen der Fremdatome schwächer gebunden sind, können diese bereits bei tieferen Temperaturen zur Leitung beitragen. Ihr Anteil ist jedoch bei hohen Temperaturen deutlich schwächer als die der intrinsische Leitung.

**Intrinsische Leitung** Ist in einem Halbleiter die Zahl der Ladungsträger von Fremdatomen vernachlässigbar gegen die Zahl der Ladungsträger aus dem Valenzband, so spricht man von intrinsischer Leitung. Zur Herstellung von Halbleitern eignen sich hauptsächlich Elemente bzw. Verbindungen mit vier Valenzelektronen (z. B. Germanium, Silizium und Galliumarsenid), die im Kristallverbund jeweils eine kovalente Bindung mit einem Nachbaratom eingehen. Diese Elektronen können nun durch thermische Anregung, Absorption von Licht, oder anderen Effekten ins Leitungsband angehoben werden. Solche Halbleiter nennt man auch intrinsische Halbleiter. Damit die Zahl der Ladungsträger von Fremdatomen vernachlässigbar ist, muss man den Fall hochreiner Halbleiter, also quasi ohne Fremdatome, oder hohen Temperaturen bzw. sehr kleiner Bandlücken betrachten, bei denen die thermisch angeregten Valenzelektronen dominieren.

### 1.3 Ladungsträgerkonzentration

Die Ladungsträgerkonzentration  $n_F$  von Fermionen ergibt sich durch

$$n_F = (2s + 1) \int_0^{\infty} D(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon) d\varepsilon$$

Die Zustandsdichte  $D(\varepsilon)$  ist für ein einzelnes Teilchen in  $d$  Dimensionen ist gegeben durch:

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\vec{k})) d\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}\right) d\varepsilon$$

Im 3-dimensionalen Fall erhält man

$$D_{3D}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

Man betrachtet nun die Elektronen ( $s = \frac{1}{2}$ ) in einem nichtentarteten Halbleiter, also einem Halbleiter, bei dem die Näherung der Fermi-Verteilung durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gültig ist. Damit man die Näherung als freies Teilchen verwenden kann, muss von der Energie  $E$  das Grundniveau  $E_0$  abgezogen werden. Dann hat man:

$$\begin{aligned}
n_F &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{|E - E_0|} \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) dE = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{|E - E_0|} \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) dE \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|E_0 - E_F|}{k_B T}\right) (k_B T)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{x} \exp(-x) dx = 2 \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{|E_0 - E_F|}{k_B T}\right)
\end{aligned}$$

Die Elektronen- und Löcherkonzentration ergibt sich also zu:

$$\begin{aligned}
n &= N_L \cdot \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{kT}\right), \text{ wobei } N_L \equiv 2 \cdot \left(m_n \frac{kT}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \\
p &= N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right), \text{ wobei } N_V \equiv 2 \cdot \left(m_p \frac{kT}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

$E_L$ : untere Kante des Leitungsbandes

$E_V$ : obere Kante des Valenzbandes

$E_F$ : Fermienergie

Die Konzentrationen hängen also von der Differenz der Fermienergie und den Kanten des jeweiligen Bandes ab, in denen sich die Ladungsträger aufhalten. Das Produkt der beiden Konzentrationen ist hingegen nicht mehr von der Fermienergie abhängig, entscheidend ist hier nur noch der Abstand von Leitungs- und Valenzband, die so genannte Bandlücke  $E_G = E_L - E_V$

$$p \cdot n = N_L N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{kT}\right) = N_L N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_G}{kT}\right)$$

Die nun noch auftretenden Terme  $N_L$ ,  $N_V$  und  $E_G$  sind näherungsweise konstant, das heißt das Produkt der Ladungsträgerkonzentrationen ist konstant bei gleich bleibender Temperatur.

Bei intrinsischen Halbleitern entstehen z. B. durch thermische Anregung immer nur Elektron-Loch-Paare, das bedeutet die Löcher- und die Elektronenkonzentrationen sind gleich,  $n = p = n_i$ .

Das Produkt  $n \cdot p$  vereinfacht sich somit zu

$$n_i = \sqrt{p \cdot n} = \sqrt{N_L N_V} \exp\left(-\frac{E_G}{2kT}\right) = (m_n m_p)^{3/4} \cdot \left(\frac{kT}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_G}{2kT}\right)$$

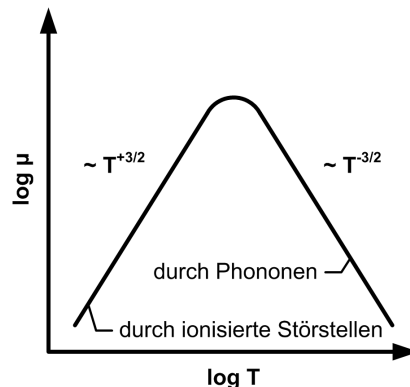
Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration ist also proportional zu  $T^{3/2}$  und hängt ansonsten nur von der Energie der Bandlücke  $E_G$  ab.

## 1.4 Ladungsträgerstreuung und Mobilität

Ladungsträger in einem Kristall können auf Grundsätzlich zwei unterschiedliche Arten gestreut werden. Durch Streuung an Störstellen oder durch Streuung an Gitterschwingungen bzw. Phononen. Es hängt von der Temperatur ab, welcher Streuprozess bei der Messung dominiert.

Man erhält die Gesamtmobilität durch Berechnung der Einzel-Relaxationszeiten  $\tau_i$

$$\mu_{ges} = \frac{e}{m^*} \left(\sum_i \frac{1}{\tau_i}\right)^{-1}$$



### 1.4.1 Streuung an Störstellen

Die Streuung an Störstellen kann theoretisch durch die Rutherfordstreuung modelliert werden. Es ergibt sich, dass für die Relaxationszeit  $\tau$  gilt:  $\tau \propto \sigma_R^{-1} v^{-1}$ , mit dem von der Störstelle abhängenden Rutherfordstreuquerschnitt  $\sigma_R$  und der Geschwindigkeit  $v$ . Weiter ist aus der Streutheorie bekannt, dass  $\sigma_R \propto v^{-4}$ , so dass man erhält:

$$\tau \propto v^3$$

Man berechnet nun mit der Formel

$$\frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{3}{2} k_B T \implies v = \sqrt{\frac{3k_B}{m^*}} T^{1/2}$$

den Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Geschwindigkeit und Temperatur. Damit hat man den Zusammenhang:

$$\mu_{stör} \propto T^{3/2}$$

Also nimmt die Mobilität bei tiefen Temperaturen zunächst mit der Temperatur zu.

### 1.4.2 Streuung an Gitterschwingungen / Phononen

**Akustische Phononen** Bei der akustischen (nichtpolaren) Deformationspotentialstreuung handelt es sich um die Streuung der Ladungsträger an den Schallwellen im Kristall. Diese Schallwelle kann durch die Auslenkungen der einzelnen Atome aus ihrer Ruhelage beschrieben werden.

Im 3-dimensionalen Fall ist die Temperaturabhängigkeit gegeben durch

$$\mu_{ak,3D}(T) = C_{ak,3D} \cdot T^{-3/2}$$

Betrachtet man dagegen ein zweidimensionales Elektronengas, so hat man die Temperaturabhängigkeit:

$$\mu_{ak,2D}(T) = C_{ak,2D} \cdot T^{-1}$$

In beiden Fällen erkennt man, dass die Mobilität  $\mu_{ak}$  bei steigender Temperatur abnimmt, da die Wahrscheinlichkeit, dass die Elektronen an den Phononen gestreut werden zunimmt, weil durch höhere Temperaturen vermehrt Gitterschwingungen erzeugt werden.

**Optische Phononen** Optische Phononen entstehen in Kristallen, die mehr als ein Atom in der Einheitszelle besitzen. Die optische Deformationspotentialstreuung ist die Streuung der Ladungsträger an longitudinal optischen Phononen. Durch solche Phononen werden die Atome innerhalb einer Elementarzelle zu gegenphasigen Schwingungen angeregt. Sie besitzen eine minimale Energie, ab der sie erst angeregt werden können. Die Bezeichnung Optische Phononen stammt daher, dass sie in ionischen Kristallen leicht durch Licht (in der Regel Infrarotstrahlung) angeregt werden können.

In erster Näherung gilt im 2-dimensionalen Fall:

$$\mu_{opt,2D}(T) = C_{opt,2D} \cdot \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_{ph}}{k_B T}\right) - 1 \right]$$

## 1.5 Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  gibt die Fähigkeit eines Stoffes an, elektrischen Strom zu leiten. Sie ist gegeben durch das Ohmsche Gesetz im Mikroskopischen

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

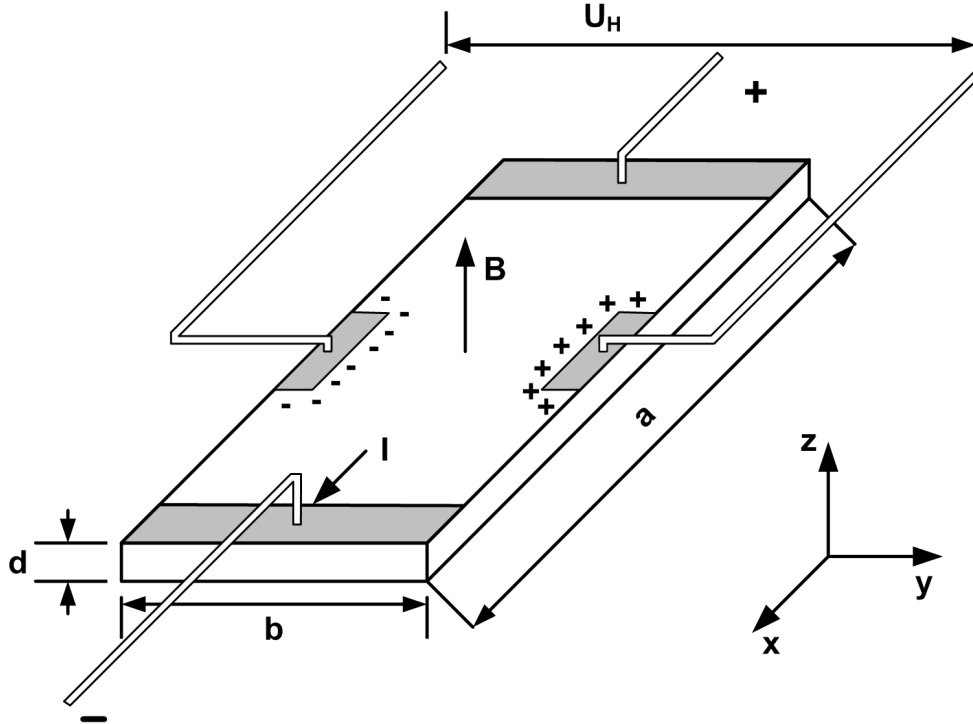
$j$ : Stromdichte,  $E$ : elektrisches Feld

Im Normalfall sind  $j$  und  $E$  nicht parallel, weshalb die Leitfähigkeit im Allgemeinen durch einen Tensor gegeben ist. Wählt man einen Aufbau, bei dem die Stromdichte und das Feld parallel sind, so reduziert sich die Leitfähigkeit auf einen Skalar. Für die Stromdichte gilt:  $j = nqv$ , wobei  $n$  die Ladungsträgerkonzentration,  $q$  die Ladung und  $v$  die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger ist. Für  $\sigma$  bedeutet dies:

$$\sigma = n |q| \frac{|\vec{v}|}{|\vec{E}|} \equiv n |q| \mu$$

Man führt die Größe  $\mu$  ein, die Beweglichkeit bzw. Mobilität. Sowohl die Mobilität  $\mu$ , als auch die Ladungsträgerkonzentration  $n$  sind temperaturabhängig und beide bewirken die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit.

Zur Messung der Leitfähigkeit betrachtet man die Schaltung:



Die Stromdichte  $j$  ist gegeben durch den Strom  $I$  durch die Stirnfläche des Präparats:  $j = \frac{I}{A} = \frac{I}{bd}$ , das elektrische Feld ist gegeben durch  $\frac{U_L}{a}$ :

$$\sigma_{3D} = \frac{j}{E} = \frac{I}{U_L} \frac{a}{bd}$$

Hat man  $\sigma$  bestimmt, so fehlt zur Berechnung der Mobilität nur noch die Teilchenkonzentration  $n$ , diese wird im Versuch mit Hilfe des Halleffekts, genauer gesagt über die Hallkonstante  $R_H$  bestimmt.

## 1.6 Halleffekt bei Elektronen- und Löcherleitung (bipolare Leitung)

Bringt man einen stromdurchflossenen Leiter in ein Magnetfeld, so erfahren die Ladungsträger im Leiter die Lorentzkraft senkrecht zu ihrer Geschwindigkeit. Es kann sich hierbei sowohl um Elektronen als auch um Löcher handeln. Die Ladungsträger werden zu einer Seite des Leiters ausgelenkt, wodurch sich auf dieser Seite ein Ladungsträgerüberschuss ausbildet, auf der anderen Seite entsprechend ein Mangel. Es bildet sich nun aufgrund der Ladungstrennung ein elektrisches Feld aus, das auf die Ladungsträger eine Kraft ausübt, die der Lorentzkraft entgegen steht. Es stellt sich somit ein Gleichgewicht ein. Die Spannung, die zwischen den beiden Seiten mit Ladungsträgerüberschuss und -mangel anliegt, nennt man Hallspannung. Sie berechnet sich wie folgt:

Die Lorentzkraft wird durch die Kraft des elektrischen Feldes ausgeglichen:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Des Weiteren stehen Geschwindigkeit, E-Feld und Magnetfeld senkrecht zueinander. Mit  $j = nqv$  ergibt sich:

$$E = v \cdot B = \frac{j}{nq} \cdot B = R_H \cdot j \cdot B = \frac{R_H \cdot I \cdot B}{d \cdot b}$$



$R_H$  ist die so genannte Hallkonstante  $\frac{1}{nq}$ , sie hängt also von der Ladungsträgerkonzentration ab. Zu Messung eben jener muss man nun noch verwenden, dass die Hallspannung und das elektrische Feld in folgendem Zusammenhang stehen:

$$E = \frac{U_H}{b} \implies U_H = \frac{R_H \cdot I \cdot B}{d}$$

Misst man nun Spannung und Strom, so kann man die Hallkonstante bestimmen und damit die Ladungsträgerkonzentration, die wiederum wie oben angesprochen in die Leitfähigkeits- und Mobilitätsbestimmung eingeht.

### 1.6.1 Bipolare Leitung

Bei einem Halbleiter kommt nun allerdings erschwerend hinzu, dass es zwei Ladungsträgersorten gibt, Elektronen und Löcher (Defektelektronen). Man spricht von bipolarer Leitung. Im extrinsischen Bereich überwiegt eine Ladungsträgersorte, weshalb man die andere Sorte vernachlässigen kann. Im intrinsischen Bereich muss man jedoch beide Ladungsträgersorten beachten, weshalb sich die Gesamtstromdichte aus den Stromdichten der Elektronen und Löcher zusammensetzt, eingesetzt in das ohmsche Gesetz:

$$\begin{aligned} j_{ges} &= j_p + j_n = p|e|v_p - n|e|v_n = |e|(p\mu_p + n\mu_n)E_L \\ &= \sigma_{bipolar}E_L \end{aligned}$$

wobei  $E_L$  das E-Feld entlang des Leiters ist.

Für die Hallkonstante hat die bipolare Leitung folgende Auswirkungen:

Das Magnetfeld übt eine Kraft auf jede der beiden Ladungsträgersorten aus, die die Ladungsträger in unterschiedliche Richtungen auslenkt, es bildet sich jedoch nur ein Gesamt-Hallfeld  $E_H$  aus, die beiden Kräfte kompensieren sich also nicht mehr und es bilden sich aufgrund der übrig bleibenden Nettokräfte auf die Ladungsträger Stromkomponenten in Krafrichtung aus, die sich im stationären Fall jedoch aufheben müssen.

$$\begin{aligned} F_{\perp}^{(n)} &= -|e|(E_H + v_n B) = -|e|(E_H - \mu_n E_L B) \\ \implies j_{\perp}^{(n)} &= \sigma \frac{F_{\perp}^{(n)}}{q} = n|e|\mu_n(E_H - \mu_n E_L B) \end{aligned}$$

Führt man diese Rechnungen für die Löcher analog durch und benutzt  $j_{\perp}^{(n)} + j_{\perp}^{(p)} = 0$ , so lässt sich die resultierende Gleichung nach dem Hallfeld umformen und über die Definition der Hallkonstanten,  $R_H = -\frac{E_H}{jB}$ , und der Gesamtstromdichte  $j_{ges}$  folgt:

$$R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{|e|(p\mu_p + n\mu_n)^2}$$

Man erkennt, dass  $R_H$  negativ wird, wenn die Elektronenleitung überwiegt, also  $n > p$ , und positiv wird, wenn  $p > n$ , also Löcherleitung vorliegt. Letzteres kann jedoch nur im extrinsischen Bereich passieren, da im intrinsischen Bereich die Ladungsträgerkonzentrationen gleich sind, die Elektronenleitung jedoch aufgrund der höheren Mobilität der Elektronen überwiegt.

Ist das Verhältnis  $b$  der Mobilitäten  $\mu_n$  und  $\mu_p$  bekannt und setzt man in obiger Formel ein, dass im intrinsischen Bereich die Ladungsträgerkonzentrationen  $n$  und  $p$  gleich sind, so vereinfacht sich die Hallkonstante zu:

$$R_H = \frac{1}{|e|} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2} = \frac{1}{ne} \frac{1 - b^2}{(1 + b)^2} = \frac{1}{ne} \frac{1 - b}{1 + b}$$

Der Hallkoeffizient wird also bei intrinsischen Halbleitern um den Faktor  $\frac{1-b}{1+b}$  erweitert, der die verschiedenen Mobilitäten der beiden Ladungsträgersorten der bipolaren Leitung berücksichtigt.

## 2 Experimentelle Grundlagen

### 2.1 Versuchsaufbau und Messung

Die beiden Proben (Ge und GaAs) befinden sich in einem evakuierten Kryostaten und werden mit flüssigem Stickstoff zunächst auf  $-180\text{ °C}$  gekühlt. Mit Hilfe einer eingebauten Heizung können die Proben nun langsam auf  $150\text{ °C}$  erhitzt werden. In  $10\text{ °C}$ -Abständen werden von beiden Proben Strom und angelegte Spannung gemessen, sowie bei angelegtem Magnetfeld die Hallspannung. Der Strom durch die Spulen wird mithilfe der Eichgeraden des Aufgabenblatts so eingestellt, dass das Magnetfeld eine Feldstärke von  $0,5$  Tesla hat. Die Eichgerade ist gegeben durch:

$$B = 105,34 \frac{\text{mT}}{\text{A}} \cdot I_B$$

Damit hat man für ein Magnetfeld von  $0,5$  Tesla

$$I_B = \frac{0,5 \text{ T}}{0,10534 \frac{\text{T}}{\text{A}}} = 4,7465 \text{ A}$$

Bei der Probe A handelt es sich um einen Germanium-Volumenkristall. Die genauen Abmessungen können dem Aufgabenblatt entnommen werden. Zum fehlerfreien Messen der Hallspannung müssten die Kontakte am Kristall exakt gegenüberliegen. Da dies nicht möglich ist wird die Hallspannung zunächst bei angelegtem Magnetfeld gemessen und anschließend nochmals bei umgepoltem Magnetfeld, sodass sich durch Mittelung der Messungen eventuelle Asymmetrien der Schaltung ausgeglichen werden können. Auf jeden Fall müssen jedoch die Kontakte niederohmig sein, um das Ergebnis nicht zusätzlich zu verfälschen.

Probe B ist ein so genanntes Hallkreuz, in dessen Mitte ein Galliumarsenidplättchen angebracht ist. Diese Geometrie nennt sich nach seinem Erfinder van-der-Pauw-Geometrie und hat mehrere Vorteile. Durch den hochsymmetrischen Aufbau des Hallkreuzes ist eine Messung der Hallspannung direkt möglich, ohne eine Mittelung wie bei Probe A vornehmen zu müssen. Auch die Kontakte können größer gewählt werden, was den Kontaktwiderstand und somit eine potentielle Fehlerquelle verringert. Mit einem Schalter an der Messapparatur kann die Schaltung zwischen Hallspannungs- und Leitfähigkeitsmessung umgeschaltet werden. Da die Probe im Gegensatz zum Germanium-Volumenkristall als 2-dimensional angenommen wird ändern sich die Formeln zur Bestimmung der Leitfähigkeit etwas, im Prinzip fällt lediglich die Probendicke aus der Berechnung heraus:

$$\sigma_{2D} = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{I}{U}$$

Dies erkennt man, wenn man in der Herleitung [1] noch vor dem Beweis durch die konforme Abbildung bei der Definition der Stromdichte eine 2-dimensionale Stromdichte einsetzt. Das weitere Ergebnis bleibt davon unberührt wie man einsieht, wenn man die Rechenschritte zurück bis zur Gleichung [1].3 verfolgt.

## 3 Auswertung

### 3.1 Fehlerabschätzung

#### 3.1.1 B-Feld

Die Stromstärke  $I_B$  konnte nicht genau auf den berechneten Wert eingestellt werden. Es waren auch keine Fehlerangaben der Eichgeraden vorhanden. Daher schätzen wir den Fehler auf 1%.

$$I_B = (4,747 \pm 0,05) \text{ A}$$

Wir nehmen auch auf die Steigung einen Fehler von 1% an.

$$m = (105,34 \pm 1,05) \frac{\text{mT}}{\text{A}}$$

Durch Größtfehleraddition erhalten wir den Fehler auf das Magnetfeld:

$$B = (0,5 \pm 0,01) \text{ T}$$

#### 3.1.2 Strom- und Spannungsmessungen

Für die Messinstrumente, mit denen die Messungen von  $U$  und  $I$  durchgeführt wurden, ist auch kein Fehler bekannt, so dass wir wieder einen Fehler von 1% annehmen. Dieser Fehler wird als statistischer Fehler mit Gauss'scher Fehlerfortpflanzung behandelt.

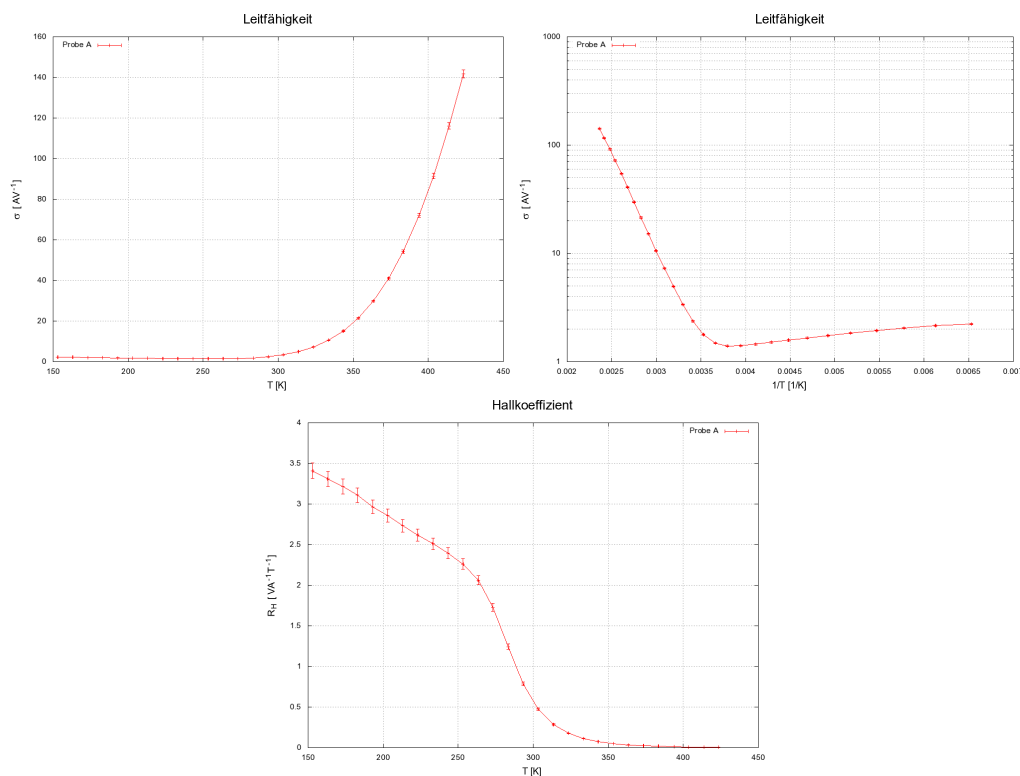
#### 3.1.3 Temperaturmessung

Die Temperatur war bis auf  $0,1 \text{ K}$  regelbar. Der Messwert zeigte eine hohe Stabilität. Bei höheren Temperaturen dauerte jedoch das Erreichen des Sollwerts relativ lange, weshalb der Sollwert leicht nachgeregelt wurde. Wir gehen also davon aus, dass die Messung der Temperatur mit einem statistischen Fehler von  $0,05 \text{ K}$  behaftet ist.

## 3.2 Probe A (Germanium)

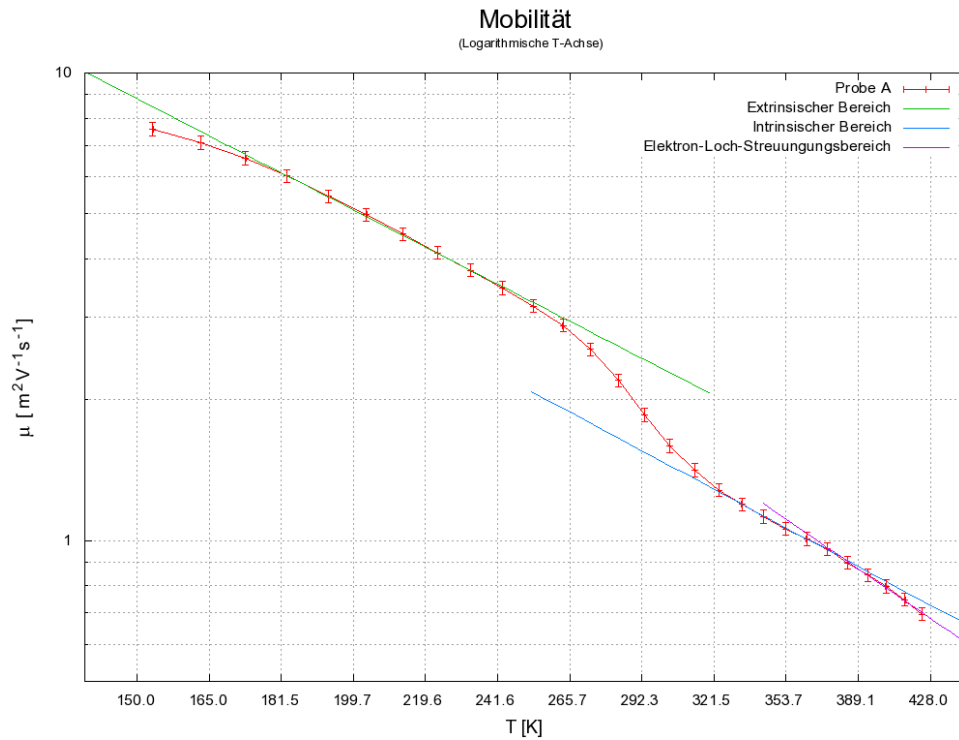
### 3.2.1 Berechnung der Leitfähigkeit und des Hallkoeffizienten

In der beiliegenden Tabelle wurden neben den Messdaten auch die Leitfähigkeit und der Hallkoeffizient nach den Formeln der Vorbereitung berechnet. Dazu wurde auch der Fehler auf diese Größen berechnet.

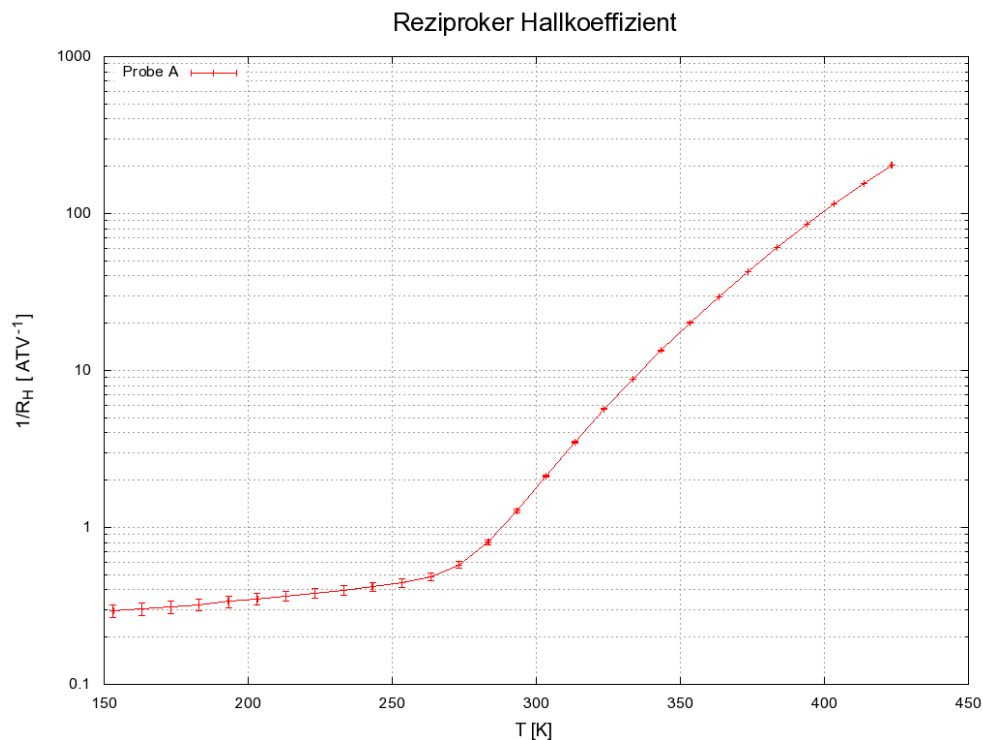


### 3.2.2 Darstellung des Hallkoeffizienten und der Mobilität

Die Mobilität wird aus dem Hallkoeffizienten und der Leitfähigkeit berechnet. Man trägt nun den reziproken Hallkoeffizienten und die Mobilität logarithmisch gegen die Temperatur auf. Um intrinsischen, extrinsischen und Übergangsbereich festzulegen, wurde eine Auftragung wie in der Vorbereitungsmappe gewählt, bei der sowohl die Mobilität, als auch die Temperatur logarithmisch aufgetragen wurde.



In dem Diagramm erkennt man deutlich den extrinsischen Bereich von 170 K bis 250 K, den Übergangsbereich zwischen 250 K und 320 K, den intrinsischen Bereich ab 320 K. Ab 380 K erkennt man die Elektron-Loch-Streuung des intrinsischen Bereichs.

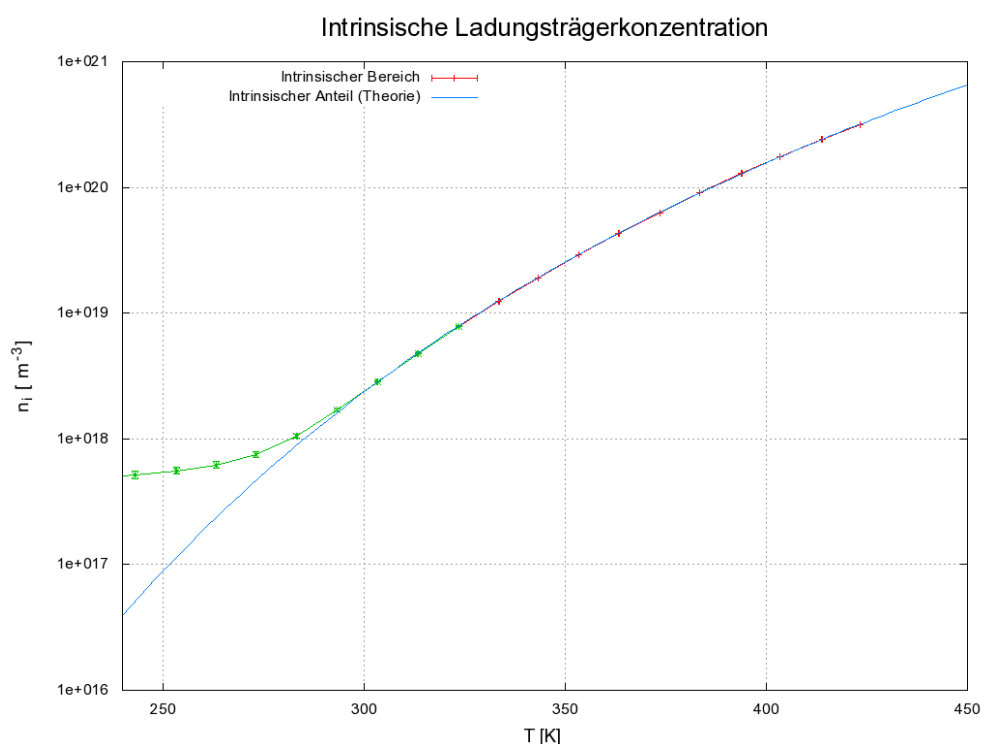


### 3.2.3 Leitungstyp im extrinsichen Bereich

Im intrinsischen Bereich sind die Ladungsträgerkonzentrationen der Elektronen und Löcher ungefähr gleich. Da jedoch die Elektronen aufgrund der kleineren effektiven Masse  $m_n^*$  eine höhere Beweglichkeit  $\mu$  besitzen, liegt hier Elektronenleitung vor. Wie man am reziproken Hallkoeffizienten erkennt, liegt keine Polstelle vor, die auf einen Vorzeichenwechsel hindeuten würde. Dies wird auch direkt aus den Messdaten für die Hallspannung ersichtlich. Der Leitungstyp im extrinsischen Bereich ändert sich also nicht, der Betrag des Hallkoeffizienten wird jedoch deutlich größer, weshalb es sich hierbei um einen n-dotierten Halbleiter handeln muss (siehe Vorbereitungsmappe Gl. 58).

### 3.2.4 Berechnung der Ladungsträgerkonzentration im intrinsischen Bereich

Die Ladungsträgerkonzentration im intrinsischen Bereich  $n_i$  wurde in der Datentabelle nach der Formel, die in der Vorbereitung hergeleitet wurde, berechnet. Im folgenden Diagramm sind in rot die zu den Datenpunkten gehörenden Ladungsträgerdichten  $n_i$  dargestellt. Zusätzlich ist mit den Informationen aus der nächsten Aufgabe eine Theoriekurve für die intrinsische Ladungsträgerdichte eingezeichnet. Ein Vergleich mit Figur 9.1 aus der Vorbereitungshilfe zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung.



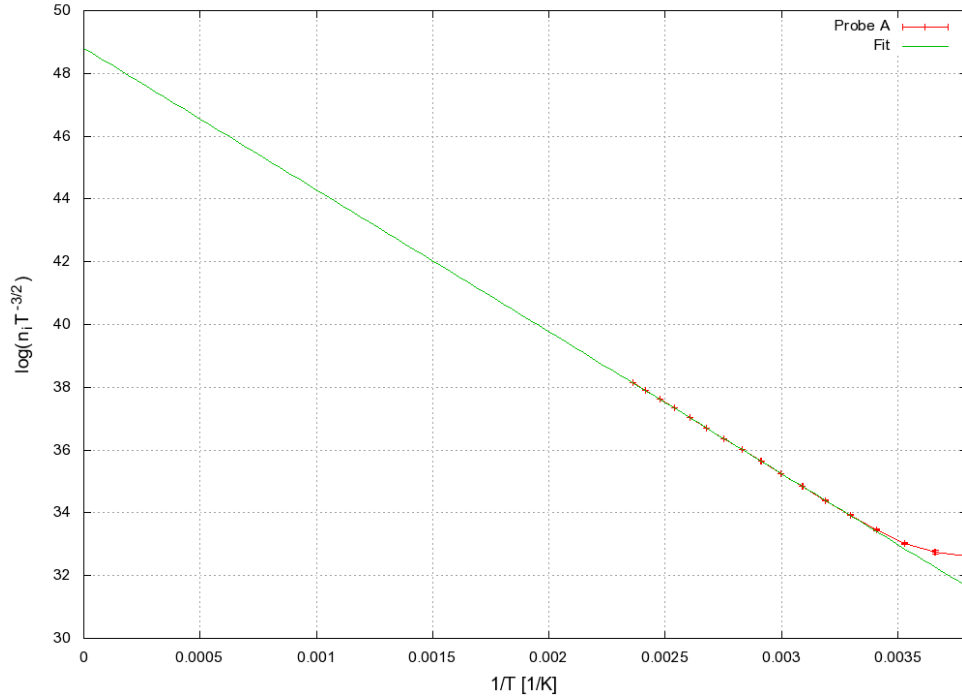
### 3.2.5 Arrheniusdiagramm

Im Arrhenius-Plot wurde  $\ln(n_i \cdot T^{-3/2})$  über  $\frac{1}{T}$  aufgetragen. Aus der Steigung lässt sich die Bandlücke  $E_{G,0}$  in der linearen Näherung bestimmen. Dafür verwenden wir die Formel:

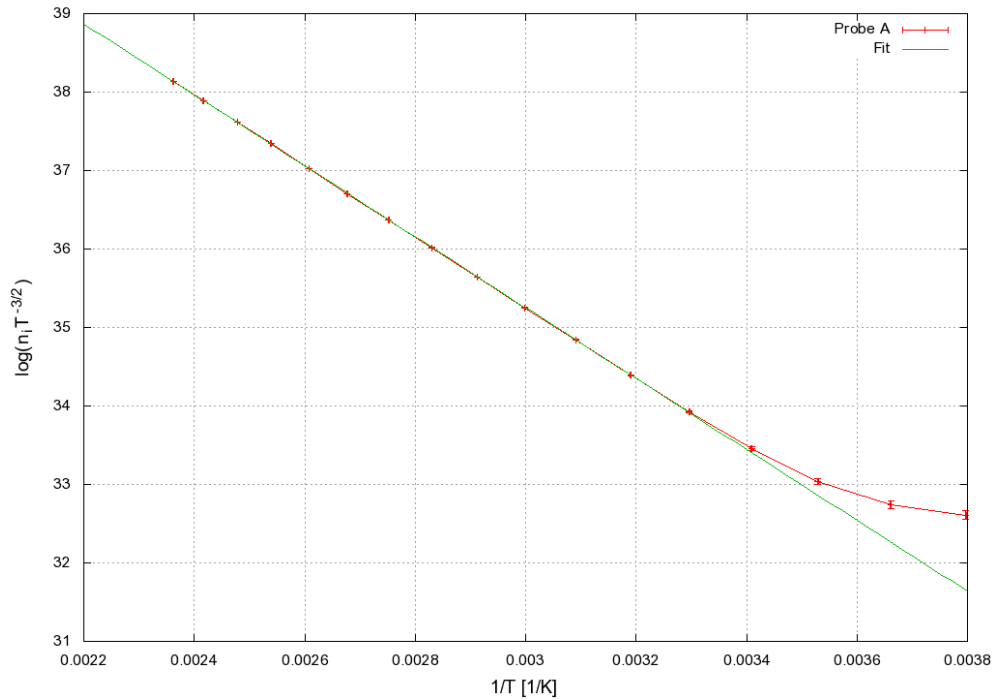
$$n_i(T) = (m_n^* m_p^*)^{3/4} \left( \frac{k_B T}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{E_{G,0} - \alpha T}{2k_B T} \right)$$

$$\ln(n_i T^{-3/2}) = \ln\left[ (m_n^* m_p^*)^{3/4} \left( \frac{k_B}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} \right] + \frac{\alpha}{2k_B} - \frac{E_{G,0}}{2k_B} \cdot \frac{1}{T}$$

Arrheniusdiagramm



Arrheniusdiagramm



Der Literatur [2] entnehmen wir die Werte für  $m_n^* = 0,22 \cdot m_e$  und  $m_p^* = 0,37 \cdot m_e$  in Germanium. Wir erhalten damit für den y-Achsenabschnitt und die Steigung einen Wert von:

$$E_{G,0} = (0,779 \pm 0,002) \text{ eV}$$

$$\alpha = (0,251 \pm 0,004) \frac{\text{meV}}{\text{K}}$$

Da die Messpunkte im Arrhenius-Diagramm recht weit von der y-Achse entfernt sind, wirkt sich eine kleine Änderung der Steigung  $E_{G,0}$  der Geraden stark auf den y-Achsenabschnitt  $konst + \alpha$  aus, was die Abweichung vom Literaturwert der Vorbereitungsmappe ( $\alpha = 0,4 \frac{\text{meV}}{\text{K}}$ ) erklären könnte.

Mit der linearen Näherung  $E_0(T) = E_{G,0} - \alpha T$  erhält man den Wert für  $T = 300K$ .

$$E_0(300 K) = (0,704 \pm 0,002) \text{ eV}$$

Der Literaturwert für  $E_0(300 K)$  liegt für Germanium bei  $0,67 \text{ eV}$ . Verwendet man hier den Literaturwert für  $\alpha$ , so erhält man einen besseren Wert für  $E_0(300K) = 0,66 \text{ eV}$ .

Nun soll noch die Elektronendichte  $n_i(300 K)$  bestimmt werden. Dafür werden  $E_{G,0}$ ,  $\alpha$  in die obige Formel eingesetzt. Man erhält:

$$n_i(300 K) = (2,36 \pm 0,09) \cdot 10^{18} \frac{1}{m^3}$$

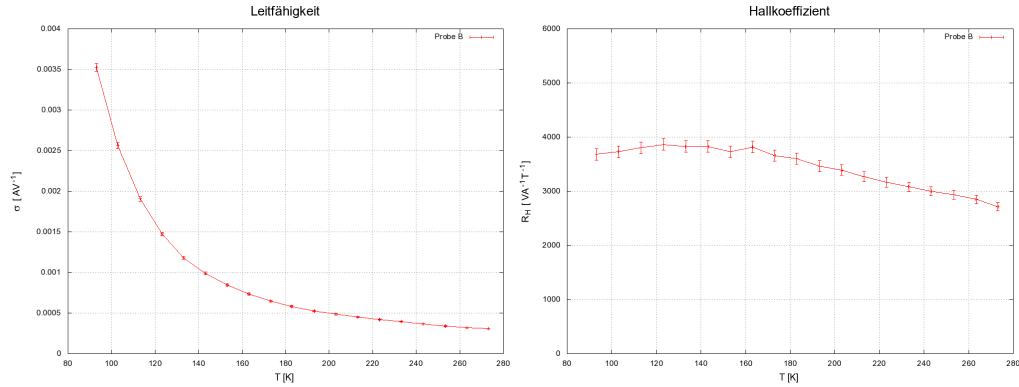
Dieser Wert ist im Einklang mit Figur 8.2 aus der Vorbereitungsmappe.

### 3.3 Probe B (Galliumarsenid)

Hier liegt die Probe in einer Hallkreuzgeometrie vor. Wie man der Vorbereitungshilfe S. 34 entnehmen kann, lässt die Geometrie die Betrachtung der Ladungsträger als 2-dimensionales Elektronengas zu.

#### 3.3.1 Berechnung der Leitfähigkeit und des Hallkoeffizienten

Auf der beiliegenden Tabelle wurden neben den Messdaten auch die Leitfähigkeit und der Hallkoeffizient berechnet. Neben diesen Größen wurde auch deren Fehler berechnet.

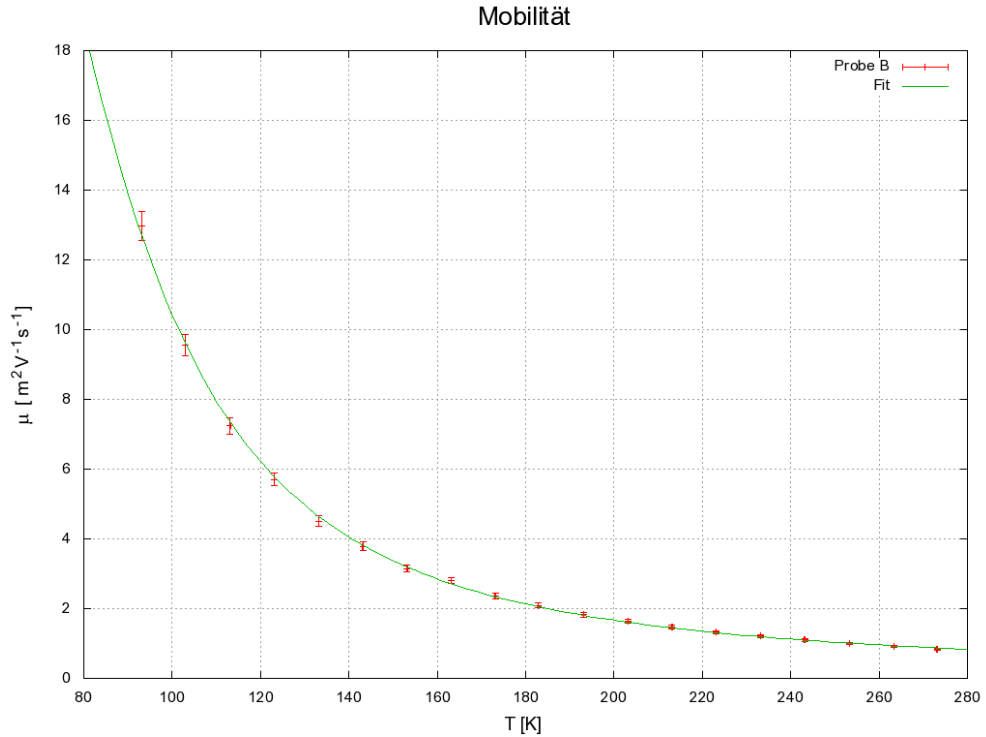


#### 3.3.2 Darstellung und Modellierung der Mobilität

Wie bei Probe A wurde die Mobilität aus Leitfähigkeit und Hallkoeffizient bestimmt und im nächsten Diagramm gegen die Temperatur dargestellt.

**Anpassung an optische und akustische Phononstreuung** An die Mobilität wird unter Berücksichtigung der optischen und akustischen Phononstreuung der theoretische Verlauf angepasst. Dafür wird die Formel aus der Vorbereitung verwendet:

$$\mu_{2D} = \left( C_{ak,2D}^{-1} T + C_{opt,2D}^{-1} \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_{ph}}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \right)^{-1}$$



Für die Parameter  $C_{ak,2D}$ ,  $C_{opt,2D}$  und  $E_{Ph} = \hbar\omega_{Ph}$  ergaben sich:

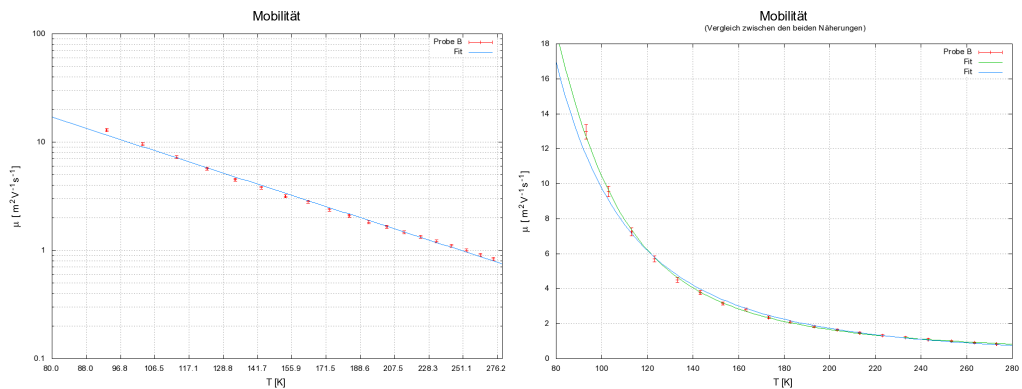
$$C_{ak,2D} = (2100 \pm 200) \frac{m^2 K}{Vs}$$

$$C_{opt,2D} = (0,24 \pm 0,01) \frac{m^2}{Vs}$$

$$E_{Ph} = (38 \pm 1) meV$$

Der Literaturwert [3] für longitudinale, optische Phononen in Galliumarsenid liegt bei  $E_{Ph} = 36,1 meV$ . Unser Wert liegt also nur 2 Standardabweichungen vom Literaturwert entfernt.

**Anpassung an  $C \cdot T^\gamma$**  Zum Vergleich haben wir auch eine Kurvenanpassung an  $C \cdot T^\gamma$  durchgeführt. Man erkennt deutlich, dass für kleine Temperaturen die Abweichung von dieser Näherung stark zunimmt.



Bei der Anpassung ergaben sich diese Parameter:

$$C = (9 \pm 2) \cdot 10^5 \frac{m^2}{Vs}$$

$$\gamma = -2.49 \pm 0.03$$



### 3.4 Vergleich der Mobilitäten von Probe A und Probe B

Zuletzt sollten die Mobilität von Probe A und Probe B gemeinsam in ein Diagramm eingezeichnet werden. Es fällt auf, dass die Mobilitäten der beiden Halbleiter in der selben Größenordnung liegen, obwohl die Leitfähigkeiten und Hallkoeffizienten um mehrere Zehnerpotenzen unterscheiden. Dabei besitzt die Probe A aus Germanium eine große Mobilität bei hohen Temperaturen im Vergleich zu Probe B. Dafür scheint die Probe B aus Galliumarsenid für tiefe Temperaturen höhere Mobilität zu besitzen. Man kann erahnen, dass die Probe A bei noch tieferen Temperaturen zum Isolator wird, da kein Donator mehr ionisiert ist, also die Ladungsträger „ausfrieren“.

